ECN 7060 Examen Intra 2021

2021-10-26

1. (20 points) Une variable aléatoire X suit une loi Cauchy ($X \sim \mathrm{Ca}(x_0, \gamma)$) avec paramètres x_0 et γ si elle a la fonction caractéristique

$$\phi_x(t) = e^{ix_0 t - \gamma|t|}.$$

Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathrm{Ca}(x_0, \gamma)$. Soit $S_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - x_0)$.

   a. Trouvez la fonction caractéristique de S_n.
   b. Trouvez la loi de S_n.
   c. Est-ce que la moyenne de X_n existe et si oui, quelle est sa valeur?

2. (15 points) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace de probabilité où $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ et P est la probabilité telle que $P(\{\omega\}) = 2^{-\omega}$. Soit $X_n \colon \Omega \to \mathbb{R}$ la suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ définie par

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega < n \\ 2^n & \omega \geq n. \end{cases}$$

   a. Démontrez que $X_n \overset{p.s.}{\to} 0$.
   b. Trouvez $E[X_n]$ et $\lim_{n\to\infty} E[X_n]$, si elles existe.
   c. Pourquoi le théorème de convergence monotone n'implique pas $E[X_n] \to E[X]$?
   d. Qu'est-ce que le théorème de convergence dominante permet de conclure sur la suite X_n?

3. (15 points) Prouvez qu'une tribu est une algèbre et qu'une algèbre est une semi-algèbre.

4. (20 points) Une variable aléatoire X suit une loi géométrique, avec paramètre $p \in (0, 1)$, si

$$\Pr[X = k] = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

   a. Trouvez la fonction génératrice des moments.
   b. À partir de la fonction génératrice des moments, trouvez la moyenne et la variance d'une variable aléatoire ayant la loi géométrique avec parametrè $p \in (0, 1)$.

5. (15 points) Trouvez $\sup_n A_n$, $\limsup_n A_n$, $\inf_n A_n$, et $\liminf_n A_n$ pour

   a. $A_n = [1/n, 2/n)$,
   b. $A_n = \{(-1)^n\} \cup \{1\}$.

6. (15 points) Supposez que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité où $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ et $P(\{\omega\}) = 2^{-\omega}$.

   a. Montrez que la séquence de variables aléatoires $X_n = 2^n 1_{\{n\}}(\omega)$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vérifie

$$E[\liminf_{n\to\infty} X_n] < \liminf_{n\to\infty} E[X_n].$$

b. Donnez une séquence de variables aléatoires $X_n \geq 0$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que

$$E[\liminf_{n\to\infty} X_n] = \liminf_{n\to\infty} E[X_n].$$

c. Donnez une séquence de variables aléatoires $X_n \geq 0$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que $E[\liminf_{n\to\infty} X_n] < \infty$ et $\liminf_{n\to\infty} E[X_n] = \infty$.

d. Donnez une séquence de variables aléatoires $X_n \geq 0$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que $E[\liminf_{n\to\infty} X_n] = \infty$ et $\liminf_{n\to\infty} E[X_n] = \infty$.