Université de Montréal
Faculté des arts et des sciences
Département de sciences économiques

EXAMEN FINAL

Mercredi 22 décembre 2021, de 13h à 16h

ECN 7060A **PROBABILITÉ POUR ÉCONOMISTES** AUTOMNE 2021

Professeur :	William MCCAUSLAND
Directives pédagogiques :	Une page (format lettre) de documentation **permise**.
Pondération :	Cet examen compte pour 40% de la note finale.

Une variable aléatoire X suit une loi Poisson ($X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$) avec paramètre $\lambda > 0$ si

$$P(\{X = k\}) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dans ce cas, $E[X] = \lambda$ et $\mathrm{Var}[X] = \lambda$.

Une variable aléatoire Y suit une loi Gamma ($Y \sim \mathrm{Ga}(\alpha, \beta)$) avec paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ si elle a la densité

$$f(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta y} \quad y > 0.$$

Dans ce cas, $E[Y] = \alpha/\beta$.

1. (35 points) Soit $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{iid}\,\mathrm{Po}(\lambda)$.
   (a) Montrez que $E[X_i] = \lambda$.
   (b) Trouvez une statistique exhaustive minimale pour λ et démontrez qu'elle est exhaustive et minimale.
   (c) Trouvez l'estimateur maximum de vraisemblance $\hat{\lambda}_{MV}$ pour λ et calculez son biais, sa variance et son erreur carrée moyenne.
   (d) Trouvez l'espérance de la fonction de score.
   (e) Démontrez que $\hat{\lambda}_{MV}$ est efficace.
   (f) Démontrez que $\hat{\lambda}_{MV} \xrightarrow{p} \lambda$.
   (g) Supposez que $\lambda \sim \mathrm{Ga}(\alpha, \beta)$ et qu'on observe $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
      i. Trouvez la moyenne a posteriori $\hat{\lambda}_B$ de λ et trouvez son biais comme estimateur de λ.
      ii. Décrivez comment trouver un intervalle de haute probabilité postérieure $1 - \alpha$. Décrivez brièvement l'évènement conditionnel qui a la probabilité $(1 - \alpha)$

2. (10 points) Soit $X_1, X_2, \ldots,$ des variables aléatoires iid, avec $X_i \sim U(0, \theta)$. On observe la réalisation $x \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ de $X \equiv (X_1, \ldots, X_n)$. Trouvez la fonction de score et son espérance.
3. (10 points) Soit W_n une suite d'estimateurs qui converge en probabilité à un paramètre scalaire θ. Soit b_n une suite de constantes réelles telle que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Montrez que $W_n + b_n$ est une séquence d'estimateurs qui converge en probabillité à θ.
4. (35 points) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires iid, ayant une loi $N(\mu, 1)$, où μ est inconnu.
   (a) Trouvez la statistique LRT pour le test de l'hypothèse nulle $H_0 : \mu = \mu_0$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
   (b) Utilisez cette statistique LRT pour construire un test de niveau α de l'hypothèse nulle.
   (c) Invertissez ce test pour construire un intervalle de confiance pour μ avec probabilité de couverture $1 - \alpha$. Décrivez brièvement l'évènement qui a la probabilité $(1 - \alpha)$.
   (d) Soit $T = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$. Quelle est la loi de T pour μ donné ?
   (e) Soit $F_T(t; \mu)$ la fonction de répartition de T, selon la valeur de μ. Montrez que la quantité $F_T(T; \mu)$ est pivotale et utilisez-la pour construire un intervalle de confiance pour μ avec probabilité de couverture $1 - \alpha$.
5. (10 points) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité avec $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, P telle que $P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{c\}) = 1/3$ et $P(\{d\}) = 0$. Soit X et Y les variables aléatoires définies par

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = a, \\ 2 & \omega \in \{b, c\}, \\ 3 & \omega = d; \end{cases} \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 4 & \omega \in \{a, b\}, \\ 5 & \omega \in \{c, d\}. \end{cases}$$

   (a) Décrivez $P(\{b, c\}|Y)$ (sans preuve). Est-elle unique ?
   (b) Décrivez $E[X|Y]$ (sans preuve). Est-elle unique ?
   (c) Décrivez $P(\{a\}|X)$ (sans preuve). Est-elle unique ?