Université de Montréal
Faculté des arts et des sciences
Département de sciences économiques

EXAMEN FINAL

Mercredi 16 décembre 2020, de 13h à 16h

ECN 7060A **PROBABILITÉ POUR ÉCONOMISTES** AUTOMNE 2020

Professeur :	William MCCAUSLAND
Directives pédagogiques :	Documentation **permise**.
Pondération :	Cet examen compte pour 50% de la note finale.

Une variable aléatoire X suit une loi Pareto ($X \sim \mathrm{Pa}(x_0, \gamma)$) avec paramètres $x_0 > 0$ et $\gamma > 0$ si elle a la fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_0, \\ 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\gamma & x > x_0. \end{cases}$$

La moyenne de X est de $\gamma x_0/(\gamma - 1)$ si $\gamma > 1$, ∞ autrement.

Une variable aléatoire X suit une loi gamma ($X \sim \mathrm{Ga}(\alpha, \beta)$) avec paramètres $\alpha, \beta > 0$ si elle a la densité

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \qquad x \geq 0.$$

1. (30 points) Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires iid, avec $X_i \sim \mathrm{Pa}(x_0, \gamma)$. (C'est un modèle raisonnable du nombre d'habitants des villes ou de la richesse des ménages.)
   (a) Trouvez la fonction de vraisemblance et la fonction de score pour un échantillon $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Montrez que l'espérance de la fonction de score n'est pas (le vecteur) 0.
   (b) Trouvez une statistique suffisante minimale pour $\theta = (x_0, \gamma)$ et montrez quelle est suffisante et minimale.
   (c) Trouvez l'estimateur maximum de vraisemblance de θ.
   (d) Montrez que la famille de densités Pareto est une famille d'échelle et trouvez une quantité pivotale pour x_0.
   (e) Un bayésien connait la valeur de x_0 et observe $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Sa loi *a priori* pour γ est $\gamma \sim \mathrm{Ga}(\alpha, \beta)$. Trouvez la loi conditionnelle *a posteriori* $\gamma | x_0, x$.

2. (30 points) Soit $X_1, X_2, \ldots,$ des variables aléatoires iid, avec $X_i \sim U(0, \theta)$. On observe la réalisation $x \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ de $X \equiv (X_1, \ldots, X_n)$.
   (a) Trouvez la fonction de répartition et la densité de la statistique d'ordre $X_{(1)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$. (Indice : $X_{(1)} \leq x$ ssi $X_i \leq x$, $i = 1, \ldots, n$. Commencez par écrire une expression pour la fonction de répartition.)
   (b) Trouvez l'estimateur maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ et son biais.
   (c) Montrez que $\hat{\theta} \overset{p.s.}{\to} \theta$. (Vous pouvez citer un théorème et vérifier ses conditions.)
   (d) Trouvez l'estimateur méthode des moments $\tilde{\theta}$, son biais et sa variance.
   (e) Donnez un échantillon $x = (x_1, x_2, x_3)$ tel que la vraisemblance est nulle à $\tilde{\theta}$.
   (f) Si $\theta \sim \mathrm{Pa}(x_0, \gamma)$, trouvez la loi *a posteriori* $\theta|x$, l'estimation ponctuelle $E[\theta|x]$ et l'intervalle de haute probabilité $1 - \alpha$.
3. (30 points) Soit $X_1, X_2, \ldots,$ des variables aléatoires iid, ayant une loi $N(0, \sigma^2)$, où σ est inconnu.
   (a) Trouvez l'estimateur maximum de vraisemblance $\hat{\sigma}^2_{MV}$ pour σ^2 et calculez son biais, sa variance et son erreur carrée moyenne.
   (b) Démontrez que $\hat{\sigma}^2_{MV}$ est efficace.
   (c) Trouvez la statistique LRT pour le test de l'hypothèse nulle $H_0 : \sigma^2 \leq 1$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \sigma^2 > 1$.
   (d) Trouvez un intervalle de confiance pour σ^2 tel que la probabilité de couverture est de $1 - \alpha$, peu importe la valeur de σ^2. Démontrez que la probabilité de couverture est de $1 - \alpha$.
4. (10 points) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité avec $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, P telle que $P(\{a\}) = 0$, $P(\{b\}) = 0.2$, $P(\{c\}) = 0.3$, $P(\{d\}) = 0.5$. Soit $\Lambda = \{a, b, c\}$, $\mathcal{G}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{G}_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \Omega\}$, X une variable aléatoire définie par

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = a, \\ 2 & \omega \in \{b, c\}, \\ 3 & \omega = d. \end{cases}$$

   (a) Trouvez $E[X|\mathcal{F}]$, $E[X|\mathcal{G}_1]$, $E[X|\mathcal{G}_2]$.
   (b) Trouvez $P[\Lambda|\mathcal{F}]$, $P[\Lambda|\mathcal{G}_1]$, $P[\Lambda|X]$.