Faculté des arts et des sciences
Département de sciences économiques

EXAMEN FINAL

Mercredi 18 décembre 2019, de 13h à 15h45

ECN 7060A **PROBABILITÉ POUR ÉCONOMISTES** AUTOMNE 2019

Professeur :	William MCCAUSLAND
Directives pédagogiques :	Documentation **non permise**.
	Calculatrice non programmable **permise**.
	Téléphone cellulaire et tout appareil électronique à mémoire **non permis**.
Pondération :	Cet examen compte pour 50% de la note finale.

... pour être certain que l'on ne vous soupçonnera pas de plagiat, nous vous invitons à suivre les règles de conduite ci-dessous pendant les examens :
- Évitez de parler ;
- Si quelqu'un d'autre que le surveillant vous pose une question, même si ça ne concerne pas l'examen, évitez de répondre. La seule personne à laquelle les étudiants doivent s'adresser est le surveillant ;
- N'ayez en votre possession que le matériel autorisé ;
- Évitez d'emprunter des objets à votre voisin (calculatrice, ouvrage de référence, efface, mouchoir, etc.) ;
- Déposez en avant de la salle tous les effets personnels non permis pour l'examen ;
- Fermez votre téléphone cellulaire durant l'examen. En cas d'oubli de votre part, s'il sonne, vous ne pouvez y répondre ;
- Arrivez à l'heure ; aucune période supplémentaire ne sera allouée aux retardataires et le surveillant pourra même vous refuser l'accès à la salle d'examen. (Après une heure de retard, aucun étudiant ne sera admis dans la salle d'examen.) ;
- Aucune sortie n'est autorisée pendant la première heure. Ensuite, la durée d'une sortie ne doit pas dépasser cinq minutes. Aucune permission de sortie n'est accordée tant que l'étudiant précédent n'est pas de retour ;
- Ayez en main votre carte étudiante ou une pièce d'identité avec photo.

Nous vous rappelons qu'en vertu du Règlement disciplinaire sur le plagiat ou la fraude concernant les étudiants, le plagiat se solde souvent par la note «**F**», soit «échec», et peut même aller jusqu'à la suspension ou le renvoi de l'Université. C'est sérieux, pensez-y !

Attention ! Ce questionnaire est reproduit recto verso

Une variable aléatoire X suit une loi Cauchy ($X \sim \mathrm{Ca}(x_0, \gamma)$) avec paramètres x_0 et γ si elle a la densité

$$f(x) = \frac{1}{\pi\gamma\left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, la fonction de répartition de X et sa fonction caractéristique sont

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}, \qquad \phi_x(t) = e^{ix_0t-\gamma|t|}.$$

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative ($X \sim \mathrm{Nb}(r,p)$) avec paramètres $r > 0$ et $p \in (0,1)$ si elle a la fonction de masse

$$\Pr[X = k] = \binom{k+r-1}{k}(1-p)^r p^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Quand r est entier, la loi $\mathrm{Nb}(r,p)$ est la loi du nombre de succès qui ont lieu avant le r-ième échec, dans une suite d'essais indépendants où la probabilité de succès est de p et celle d'échec est de $(1-p)$.

Une variable aléatoire X suit une loi Beta ($X \sim \mathrm{Be}(\alpha,\beta)$) avec paramètres $\alpha, \beta > 0$ si elle a la densité

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \qquad x \in [0,1].$$

1. (30 points) Soit $X_1, X_2, \ldots,$ des variables aléatoires iid, avec $X_i \sim \mathrm{Ca}(x_0, \gamma)$. Soit $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$. Attention : quelques réponses sont contre-intuitives.
   (a) Trouvez la fonction caractéristique $\phi_{\bar{X}_n}(t)$ de $\bar{X}_n$.
   (b) Trouvez la loi de $Z_n \equiv (\bar{X}_n - x_0)/\gamma$? Est-ce que Z_n est pivotale ?
   (c) Est-ce que $\bar{X}_n$ converge à x_0 en probabilité ?
   (d) Est-ce que $\sqrt{n} Z_n$ a une limite en loi ?
   (e) Trouvez un intervalle de confiance pour x_0 basé sur la quantité Z_n. Est-ce que l'intervalle devient plus court quand n augmente ?
   (f) Trouvez un test de l'hypothèse $H_0 : x_0 = 0$ contre $H_1 : x_0 \neq 0$, basé sur Z_n.
   (g) Démontrez que $\bar{X}_n$ *n'est pas* une statistique suffisante. (Suggestion : il suffit de considérer le cas $n = 2$.)
2. (30 points) Soit $p \in (0, 1)$ un paramètre aléatoire avec loi *a priori* $p \sim \mathrm{Be}(\alpha, \beta)$. Soit $r > 0$ une constante connue. Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires conditionnellement iid sachant p, avec $X_i \sim \mathrm{Nb}(r, p)$. On observe $X \equiv (X_1, \ldots, X_n)$.
   (a) Trouvez la fonction de vraisemblance.
   (b) Trouvez une statistique suffisante minimale pour p et montrez qu'elle est suffisante et minimale.
   (c) Trouvez la loi *a posteriori* de p.
   (d) Trouvez le biais de la moyenne *a posteriori* $\hat{p} = E[p|X]$ comme estimateur de p.
   (e) Démontrez explicitement que $\hat{p}$ est admissible pour une fonction de perte quadratique.
   (f) Trouvez la densité marginale de X.
   (g) Trouvez la fonction de masse prédictive $\Pr[X_{n+1} = k|X]$.
3. (30 points) Soit $X_1, X_2, \ldots,$ des variables aléatoires iid, ayant une distribution $N(0, \sigma^2)$, où σ est inconnu.
   (a) Trouvez l'estimateur maximum de vraisemblance $\hat{\sigma}^2_{MV}$ pour σ^2 et calculez son biais, sa variance et son erreur carrée moyenne.
   (b) Démontrez que $\hat{\sigma}^2_{MV}$ est efficace.
   (c) Trouvez la statistique LRT pour le test de l'hypothèse nulle $H_0 : \sigma^2 = 1$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \sigma^2 \neq 1$.
   (d) Trouvez un intervalle de confiance pour σ^2 tel que la probabilité de couverture est de $1 - \alpha$, peu importe la valeur de σ^2. Démontrez que la probabilité de couverture est de $1 - \alpha$.
4. (10 points) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité avec $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, P telle que $P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{c\}) = 1/3$ et $P(\{d\}) = 0$. Soit X et Y les variables aléatoires définies par

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = a, \\ 2 & \omega \in \{b, c\}, \\ 3 & \omega = d; \end{cases} \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 4 & \omega \in \{a, b\}, \\ 5 & \omega \in \{c, d\}. \end{cases}$$

   (a) Décrivez $P(\{b, c\}|Y)$ (sans preuve). Est-elle unique ?
   (b) Décrivez $E[X|Y]$ (sans preuve). Est-elle unique ?
   (c) Décrivez $P(\{a\}|X)$ (sans preuve). Est-elle unique ?