Université de Montréal
Faculté des arts et des sciences
Département de sciences économiques

EXAMEN FINAL

Mercredi 19 décembre, 2018, de 13h à 15h45

ECN 7060A **PROBABILITÉ POUR ÉCONOMISTES** AUTOMNE 2018

Professeur :	William MCCAUSLAND
Directives pédagogiques :	Documentation **non permise**.
	Calculatrice non programmable **permise**.
	Téléphone cellulaire et tout appareil électronique à mémoire **non permis**.
Pondération :	Cet examen compte pour 60% de la note finale.

Attention ! Ce questionnaire est reproduit recto verso

Une variable aléatoire X suit une loi Gaussienne ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$) avec moyenne μ et variance σ^2 si elle a la densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}\right].$$

Une variable aléatoire Y suit une loi Gamma ($Y \sim \mathrm{Ga}(\alpha, \beta)$) avec paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ si elle a la densité

$$f(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta y}$$

sur $[0, \infty)$. Dans ce cas, $E[Y] = \alpha/\beta$.

La dérivée de $\sin\theta$ par rapport à θ est $\cos\theta$, celle de $\cos\theta$ est $-\sin\theta$. Aussi, $\sin -\theta = -\sin\theta$, $\cos -\theta = \cos\theta$ et $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots$

1. (20 points) Soit $X_1, X_2, \ldots,$ des variables aléatoires iid, ayant une distribution uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$.
   (a) Trouvez la moyenne μ et la variance σ^2 de X_i.
   (b) Trouvez la fonction caractéristique $\phi_X(t)$ de X_i. Trouvez la fonction caractéristique $\phi_n(t)$ de $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$, où $\bar{X} \equiv n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$. Trouvez $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t)$ et donnez la limite en loi de $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$.

2. (15 points) Méli-mélo.
   (a) Trouvez $\limsup_n A_n$, $\liminf_n A_n$, $\limsup_n B_n$ et $\liminf_n B_n$, où
   $$A_n = [-n, (-1)^n), \qquad B_n = [n, \infty)$$
   (b) Trouvez le plus petit algèbre qui contient $[0, 1)$, $[1, 2]$, et $\{1\}$.
   (c) La fonction caractéristique d'une variable aléatoire $\chi^2(\nu)$ est $(1 - 2it)^{-\nu/2}$. Démontrez que la moyenne d'une $\chi^2(\nu)$ est de ν et que la variance est de 2ν. Démontrez que si $Y_1 \sim \chi^2(\nu_1)$, $Y_2 \sim \chi^2(\nu_2)$ et que Y_1 et Y_2 sont indépendantes, $(Y_1 + Y_2) \sim \chi^2(\nu_1 + \nu_2)$.
3. (35 points) Soit $X_1, X_2, \ldots,$ des variables aléatoire iid, ayant une distribution $N(0, \sigma^2)$, où σ est inconnu. Soit $\omega = 1/\sigma^2$. Sachez que $X_i^2/\sigma^2 \sim \chi^2(1)$. Les résultats de la question 2(c) pourraient être utiles.
   (a) Trouvez une statistique suffisante minimale pour σ^2 et démontrez qu'elle est suffisante et minimale.
   (b) Trouvez l'estimateur maximum de vraisemblance $\hat{\sigma}^2_{MV}$ pour σ^2 et calculez son biais, sa variance et son erreur carrée moyenne.
   (c) Démontrez que $\hat{\sigma}^2_{MV}$ est efficace.
   (d) Trouvez la statistique LRT pour le test de l'hypothèse nulle $H_0 : \omega \leq 1$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \omega > 1$.
   (e) Trouvez un intervalle de confiance pour σ^2 tel que la probabilité de couverture est de $1 - \alpha$, peu importe la valeur de σ^2. Démontrez que la probabilité de couverture est de $1 - \alpha$.
   (f) Supposez que $\omega \sim \mathrm{Ga}(\alpha, \beta)$. Trouvez la distribution postérieure de ω et la vraisemblance marginale, comme fonction de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ observé.
   (g) Démontrez explicitement que $\hat{\omega}_B = E[\omega|x]$ est admissible pour une fonction de perte quadratique.
4. (10 points) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité avec $\Omega = [0, 1]$ et P, la mesure de Lebesgue. Pour tous $n > 0$, soit $A_n \equiv [0, 1/n]$, $Z_n = 1_{A_n}$, $Z = 0$.
   (a) Lesquelles des affirmations suivantes sont vraies ? Expliquez.
      i. $Z_n \to Z$. Attention : convergence ponctuelle d'une fonction.
      ii. Z_n converge à Z presque surement.
      iii. Z_n converge à Z en probabilité.
   (b) Pour $Z_n = n1_{A_n}$, est-ce que les réponses changent ?
5. (10 points) Supposez que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité où $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ et $P(\{\omega\}) = 2^{-\omega}$.
   (a) Montrez que la séquence de variables aléatoires $X_n = 2^n 1_{\{n\}}(\omega)$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vérifie
   $$E[\liminf_{n\to\infty} X_n] < \liminf_{n\to\infty} E[X_n].$$
   (b) Donnez une séquence de variables aléatoires $X_n \geq 0$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que
   $$E[\liminf_{n\to\infty} X_n] = \liminf_{n\to\infty} E[X_n].$$
   (c) Donnez une séquence de variables aléatoires $X_n \geq 0$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que $E[\liminf_{n\to\infty} X_n] < \infty$ et $\liminf_{n\to\infty} E[X_n] = \infty$.
   (d) Donnez une séquence de variables aléatoires $X_n \geq 0$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que $E[\liminf_{n\to\infty} X_n] = \infty$ et $\liminf_{n\to\infty} E[X_n] = \infty$.
6. (10 points) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité avec $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, P telle que $P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{c\}) = 1/3$ et $P(\{d\}) = 0$. Soit X et Y des variables aléatoires avec valeurs données par le tableau suivant.

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
a	1	4
b	2	4
c	2	5
d	3	5

   (a) Décrivez $\sigma(Y)$ explicitement.
   (b) Décrivez $P(\{b, c\}|Y)$ (sans preuve). Est-elle unique ?
   (c) Décrivez $E[X|Y]$ (sans preuve). Est-elle unique ?
   (d) Décrivez $P(\{a\}|X)$ (sans preuve). Est-elle unique ?