

EXAMEN FINAL

Mercredi 19 décembre, 2018, de 13h à 15h45

ECN 7060A

PROBABILITÉ POUR ÉCONOMISTES

AUTOMNE 2018

Professeur : William MCCAUSLAND
Directives pédagogiques : Documentation **non permise**.
Calculatrice non programmable **permise**.
Téléphone cellulaire et tout appareil électronique à mémoire **non permis**.
Pondération : Cet examen compte pour 60% de la note finale.

... pour être certain que l'on ne vous soupçonnera pas de plagiat, nous vous invitons à suivre les règles de conduite ci-dessous pendant les examens :

- Évitez de parler ;
- Si quelqu'un d'autre que le surveillant vous pose une question, même si ça ne concerne pas l'examen, évitez de répondre. La seule personne à laquelle les étudiants doivent s'adresser est le surveillant ;
- N'ayez en votre possession que le matériel autorisé ;
- Évitez d'emprunter des objets à votre voisin (calculatrice, ouvrage de référence, efface, mouchoir, etc.) ;
- Déposez en avant de la salle tous les effets personnels non permis pour l'examen ;
- Fermez votre téléphone cellulaire, téléavertisseur, radio portative et baladeur durant l'examen. En cas d'oubli de votre part, s'ils sonnent, vous ne pouvez y répondre ;
- Arrivez à l'heure ; aucune période supplémentaire ne sera allouée aux retardataires et le surveillant pourra même vous refuser l'accès à la salle d'examen. (Après une heure de retard, aucun étudiant ne sera admis dans la salle d'examen.) ;
- Aucune sortie n'est autorisée pendant la première heure. Ensuite, la durée d'une sortie ne doit pas dépasser cinq minutes. Aucune permission de sortie n'est accordée tant que l'étudiant précédent n'est pas de retour ;
- Ayez en main votre carte étudiante ou une pièce d'identité avec photo.

Nous vous rappelons qu'en vertu du Règlement disciplinaire sur le plagiat ou la fraude concernant les étudiants, le plagiat se solde souvent par la note «**F**», soit «échec», et peut même aller jusqu'à la suspension ou le renvoi de l'Université. C'est sérieux, pensez-y !

Attention ! Ce questionnaire est reproduit recto verso

Une variable aléatoire X suit une loi Gaussienne ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$) avec moyenne μ et variance σ^2 si elle a la densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right].$$

Une variable aléatoire Y suit une loi Gamma ($Y \sim \text{Ga}(\alpha, \beta)$) avec paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ si elle a la densité

$$f(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta y}$$

sur $[0, \infty)$. Dans ce cas, $E[Y] = \alpha/\beta$.

La dérivée de $\sin \theta$ par rapport à θ est $\cos \theta$, celle de $\cos \theta$ est $-\sin \theta$. Aussi, $\sin -\theta = -\sin \theta$, $\cos -\theta = \cos \theta$ et $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$

1. (20 points) Soit X_1, X_2, \dots , des variables aléatoires iid, ayant une distribution uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$.
 - (a) Trouvez la moyenne μ et la variance σ^2 de X_i .
 - (b) Trouvez la fonction caractéristique $\phi_X(t)$ de X_i . Trouvez la fonction caractéristique $\phi_n(t)$ de $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$, où $\bar{X} \equiv n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$. Trouvez $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t)$ et donnez la limite en loi de $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$.

2. (15 points) Méli-mélo.

(a) Trouvez $\limsup_n A_n$, $\liminf_n A_n$, $\limsup_n B_n$ et $\liminf_n B_n$, où

$$A_n = [-n, (-1)^n), \quad B_n = [n, \infty)$$

(b) Trouvez le plus petit algèbre qui contient $[0, 1)$, $[1, 2]$, et $\{1\}$.

(c) La fonction caractéristique d'une variable aléatoire $\chi^2(\nu)$ est $(1 - 2it)^{-\nu/2}$. Démontrez que la moyenne d'une $\chi^2(\nu)$ est de ν et que la variance est de 2ν . Démontrez que si $Y_1 \sim \chi^2(\nu_1)$, $Y_2 \sim \chi^2(\nu_2)$ et que Y_1 et Y_2 sont indépendantes, $(Y_1 + Y_2) \sim \chi^2(\nu_1 + \nu_2)$.

3. (35 points) Soit X_1, X_2, \dots , des variables aléatoire iid, ayant une distribution $N(0, \sigma^2)$, où σ est inconnu. Soit $\omega = 1/\sigma^2$. Sachez que $X_i^2/\sigma^2 \sim \chi^2(1)$. Les résultats de la question 2(c) pourraient être utiles.

(a) Trouvez une statistique suffisante minimale pour σ^2 et démontrez qu'elle est suffisante et minimale.

(b) Trouvez l'estimateur maximum de vraisemblance $\hat{\sigma}_{MV}^2$ pour σ^2 et calculez son biais, sa variance et son erreur carrée moyenne.

(c) Démontrez que $\hat{\sigma}_{MV}^2$ est efficace.

(d) Trouvez la statistique LRT pour le test de l'hypothèse nulle $H_0 : \omega \leq 1$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \omega > 1$.

(e) Trouvez un intervalle de confiance pour σ^2 tel que la probabilité de couverture est de $1 - \alpha$, peu importe la valeur de σ^2 . Démontrez que la probabilité de couverture est de $1 - \alpha$.

(f) Supposez que $\omega \sim \text{Ga}(\alpha, \beta)$. Trouvez la distribution postérieure de ω et la vraisemblance marginale, comme fonction de $x = (x_1, \dots, x_n)$ observé.

(g) Démontrez explicitement que $\hat{\omega}_B = E[\omega|x]$ est admissible pour une fonction de perte quadratique.

4. (10 points) Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité avec $\Omega = [0, 1]$ et P , la mesure de Lebesgue. Pour tous $n > 0$, soit $A_n \equiv [0, 1/n]$, $Z_n = 1_{A_n}$, $Z = 0$.

(a) Lesquelles des affirmations suivantes sont vraies? Expliquez.

i. $Z_n \rightarrow Z$. Attention : convergence ponctuelle d'une fonction.

ii. Z_n converge à Z presque sûrement.

iii. Z_n converge à Z en probabilité.

(b) Pour $Z_n = n1_{A_n}$, est-ce que les réponses changent?

5. (10 points) Supposez que (Ω, \mathcal{F}, P) est un espace de probabilité où $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ et $P(\{\omega\}) = 2^{-\omega}$.

(a) Montrez que la séquence de variables aléatoires $X_n = 2^n 1_{\{n\}}(\omega)$ sur (Ω, \mathcal{F}, P) vérifie

$$E[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n] < \liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_n].$$

(b) Donnez une séquence de variables aléatoires $X_n \geq 0$ sur (Ω, \mathcal{F}, P) telle que

$$E[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n] = \liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_n].$$

(c) Donnez une séquence de variables aléatoires $X_n \geq 0$ sur (Ω, \mathcal{F}, P) telle que $E[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n] < \infty$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = \infty$.

(d) Donnez une séquence de variables aléatoires $X_n \geq 0$ sur (Ω, \mathcal{F}, P) telle que $E[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n] = \infty$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = \infty$.

6. (10 points) Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité avec $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, P telle que $P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{c\}) = 1/3$ et $P(\{d\}) = 0$. Soit X et Y des variables aléatoires avec valeurs données par le tableau suivant.

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
a	1	4
b	2	4
c	2	5
d	3	5

(a) Décrivez $\sigma(Y)$ explicitement.

(b) Décrivez $P(\{b, c\}|Y)$ (sans preuve). Est-elle unique?

(c) Décrivez $E[X|Y]$ (sans preuve). Est-elle unique?

(d) Décrivez $P(\{a\}|X)$ (sans preuve). Est-elle unique?