Faculté des arts et des sciences
Département de sciences économiques

EXAMEN FINAL

Jeudi 21 décembre, 2017, de 13h à 15h45

ECN 7060A | **PROBABILITÉ POUR ÉCONOMISTES** | AUTOMNE 2017

Professeur :	William MCCAUSLAND
Directives pédagogiques :	Documentation **non permise**.
	Calculatrice non programmable **permise**.
	Téléphone cellulaire et tout appareil électronique à mémoire **non permis**.
Pondération :	Cet examen compte pour 60% de la note finale.

... pour être certain que l'on ne vous soupçonnera pas de plagiat, nous vous invitons à suivre les règles de conduite ci-dessous pendant les examens :

- Évitez de parler ;
- Si quelqu'un d'autre que le surveillant vous pose une question, même si ça ne concerne pas l'examen, évitez de répondre. La seule personne à laquelle les étudiants doivent s'adresser est le surveillant ;
- N'ayez en votre possession que le matériel autorisé ;
- Évitez d'emprunter des objets à votre voisin (calculatrice, ouvrage de référence, efface, mouchoir, etc.) ;
- Déposez en avant de la salle tous les effets personnels non permis pour l'examen ;
- Fermez votre téléphone cellulaire, téléavertisseur, radio portative et baladeur durant l'examen. En cas d'oubli de votre part, s'ils sonnent, vous ne pouvez y répondre ;
- Arrivez à l'heure ; aucune période supplémentaire ne sera allouée aux retardataires et le surveillant pourra même vous refuser l'accès à la salle d'examen. (Après une heure de retard, aucun étudiant ne sera admis dans la salle d'examen.) ;
- Aucune sortie n'est autorisée pendant la première heure. Ensuite, la durée d'une sortie ne doit pas dépasser cinq minutes. Aucune permission de sortie n'est accordée tant que l'étudiant précédent n'est pas de retour ;
- Ayez en main votre carte étudiante ou une pièce d'identité avec photo.

Nous vous rappelons qu'en vertu du Règlement disciplinaire sur le plagiat ou la fraude concernant les étudiants, le plagiat se solde souvent par la note «**F**», soit «échec», et peut même aller jusqu'à la suspension ou le renvoi de l'Université. C'est sérieux, pensez-y !

Attention ! Ce questionnaire est reproduit recto verso

Une variable aléatoire X suit une loi Poisson ($X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$) avec paramètre $\lambda > 0$ si

$$P(\{X = k\}) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Une variable aléatoire Y suit une loi Gamma ($Y \sim \mathrm{Ga}(\alpha, \beta)$) avec paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ si elle a la densité

$$f(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta y} \quad y > 0.$$

Dans ce cas, $E[Y] = \alpha/\beta$.

1. (40 points) Soit $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Po}(\lambda)$.
   (a) Montrez que $E[X_i] = \lambda$.
   (b) Trouvez la fonction caractéristique $\phi_X(t)$ de X_i. Trouvez la fonction caractéristique $\phi_n(t)$ de $\sqrt{n}(\bar{X} - \lambda)$, où $\bar{X} \equiv n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$. Trouvez $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t)$ et donnez la limite en loi de $\sqrt{n}(\bar{X} - \lambda)$.
   (c) Trouvez une statistique suffisante minimale pour λ et démontrez qu'elle est suffisante et minimale.
   (d) Trouvez l'estimateur maximum de vraisemblance $\hat{\lambda}_{MV}$ pour λ et calculez son biais, sa variance et son erreur carrée moyenne.
   (e) Démontrez que $\hat{\lambda}_{MV}$ est efficace.
   (f) Supposez que $\lambda \sim \text{Ga}(\alpha, \beta)$. Trouvez la moyenne a posteriori $\hat{\lambda}_B$ de λ et trouvez son biais comme estimateur de λ.
   (g) Démontrez que $\hat{\lambda}_B$ est admissible pour une fonction de perte quadratique.
   (h) Trouvez la statistique LRT pour le test de l'hypothèse nulle $H_0 : \lambda \leq 1$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \lambda > 1$.
2. (15 points) Méli-mélo
   (a) Trouvez $\limsup_n A_n$, $\liminf_n A_n$, $\limsup_n B_n$ et $\liminf_n B_n$, où
   $$A_n = [1/n, 2/n), \qquad B_n = \{(-1)^n\} \cup \{1\}.$$
   (b) Trouvez l'algèbre le plus petit qui contient $\{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ et $\{\diamondsuit, \heartsuit\}$.
   (c) Soit $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, 1)$. Trouvez un intervalle de confiance $1 - \alpha$ pour μ et démontrez que la probabilité de couverture est de $1 - \alpha$, peu importe la valeur de μ.
3. (15 points) Soit X et X_n, $n = 1, 2, \ldots$ des variables aléatoires avec $P[X = 0] = 1$, $P[X_n = 1/n] = 1 - 1/n$, $P[X_n = 2^n] = 1/n$. Pour chacune des propositions suivantes, prouvez sa véracité ou sa fausseté.
   (a) $E[X_n] \to E[X]$.
   (b) X_n converge à X en probabilité.
   (c) X_n converge à X presque sûrement.
4. (15 points) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité où $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}$ est borélien et P est la mesure de Lebesgue. Soit $X(\omega) = 1/\omega$.
   (a) Trouvez une séquence $X_n(\omega)$ de variables aléatoires simples telle que $X_n \leq X$ et $\lim_{n\to\infty} E[X_n] = \infty$.
   (b) Trouvez $E[X]$. (Même si vous ne pouvez pas trouver la séquence X_n dans (a), vous pouvez supposez qu'une telle séquence existe.)
   (c) Qu'est-ce que vous pouvez conclure sur la valeur de $E[Y^{-1}]$, où $Y \sim N(1, (0.001)^2)$? Expliquez brièvement.
5. (15 points) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité où $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ et P telle que $P(\{1\}) = 0$, $P(\{2\}) = 1/4$, $P(\{3\}) = 1/4$, $P(\{4\}) = 1/2$. Soit X et Y des variables aléatoires avec
   $$X(1) = X(3) = 1,\ X(2) = X(4) = 2, \qquad Y(1) = Y(4) = 3,\ Y(2) = Y(3) = 0.$$
   (a) Trouvez $\sigma(X)$ et $\sigma(X, Y)$.
   (b) Trouvez $E[X|Y]$.
   (c) Trouvez $P(\{1, 2\}|X)$.