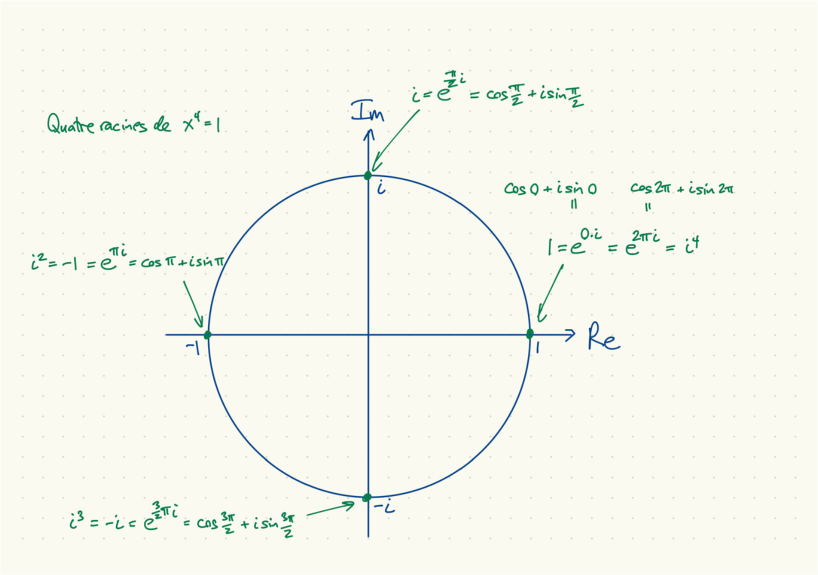
ECN 7060, Cours 7

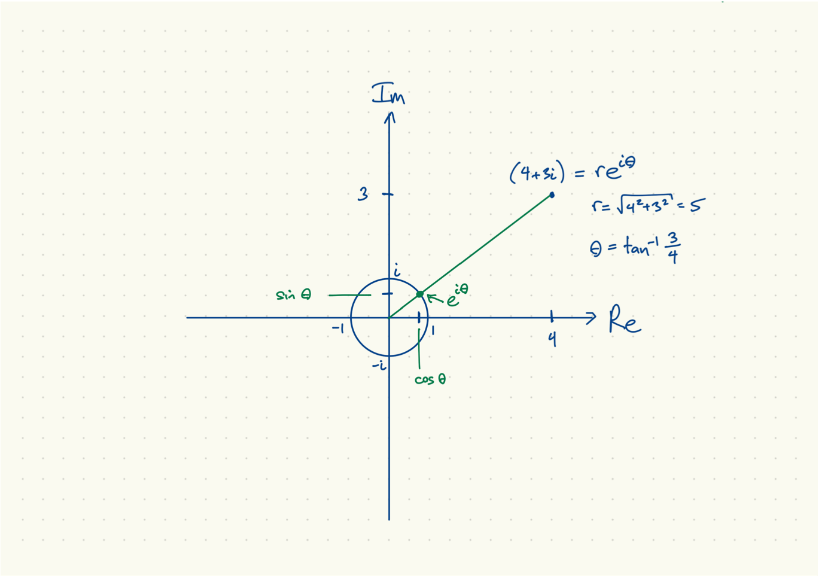
William McCausland

2022-10-18

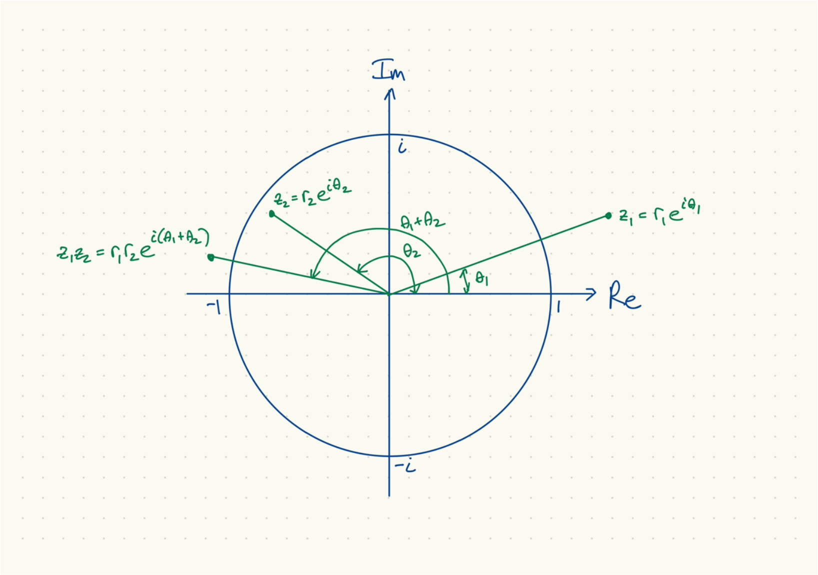
Quatre racines de $x^4 = 1$



Le module et l'argument (l'angle) d'un nombre complexe



Multiplication des nombres complexes



Des expansions des fonctions exp(·), cos(·), sin(·)

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} (i\theta)^k / k! &= 1 + i\theta + (i\theta)^2/2 + (i\theta)^3/3! + (i\theta)^4/4! + (i\theta)^5/5! + (i\theta)^6/6! \\
&= 1 - \theta^2/2 + \theta^4/4! - \theta^6/6! \ \dots \\
&\quad + i\left[\theta - \theta^3/3! + i\theta^5/5! \ \dots \right] \\
\cos\theta &= 1 - \theta^2/2 + \theta^4/4! - \theta^6/6! \ \dots \\
\sin\theta &= \theta - \theta^3/3! + \theta^5/5 \ \dots
\end{aligned}
$$

L'extension de deux définitions

1. Une fonction $Z\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est une variable aléatoire si $\Re(Z)$ et $\Im(Z)$ le sont.
2. Si $Z\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est une variable aléatoire, $E[Z] \equiv E[\Re(Z)] + iE[\Im(Z)]$.

La fonction caractéristique ϕ

- Comme la fonction de répartition F, ϕ est une autre représentation de la loi d'une v.a. qui existe et qui est unique.
- Si X est une v.a. la fonction caractéristique $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est définie par
$$\phi_X(t) \equiv E[e^{itX}].$$
- Applications :
  - Calcul des moments (mais moins convenable que la fonction génératrice des moments)
  - L'opération de convolution versus l'opération de multiplication, pour la somme des v.a. indépendantes.
  - Utilisée pour prouver le théorème central limite
  - Inférence quand les moments n'existent pas.

Aparté sur la convolution

- Soit X et Y deux v.a. indépendantes, soit $Z = X + Y$.
- Dénotez F_x, F_y, F_z les fonctions de répartition de X, Y, Z.
- On peut écrire

$$F_z(z) = P(X + Y \leq z) = \int_{\mathbb{R}} F_x(z - y) dF_y(y).$$

- Si la densité f_y de Y existe,

$$F_z(z) = \int_{\mathbb{R}} F_x(z - y) f_y(y) dy.$$

- Si la densité f_x de X existe aussi,

$$f_z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_x(z - y) f_y(y) dy \equiv f_x * f_y.$$

- $f_x * f_y$ est la convolution de f_x et f_y.

Aparté sur les fonctions paires et impaires

- Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est
  - *paire* si $f(-x) = f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$,
  - *impaire* si $f(-x) = -f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- Soit g, g_1, g_2 des fonctions paires; h, h_1, h_2, impaires.
- $\int_{-a}^{a} h(x)dx = 0$.
- Fonctions paires :
  - $\cos x$, x^i pour i pair
  - $g_1 + g_2$, $g_1 g_2$, $h_1 h_2$, h_1/h_2, $g \circ h$, $h \circ g$, h'.
- Fonctions impaires :
  - $\sin x$, x^i pour i impair
  - $h_1 + h_2$, gh, g/h, h/g, $h_1 \circ h_2$, g'
- Pour une fonction f arbitraire, $f = g_f + h_f$ ou
  - $g_f(x) \equiv (f(x) + f(-x))/2$ est paire et
  - $h_f(x) \equiv (f(x) - f(-x))/2$ est impaire.

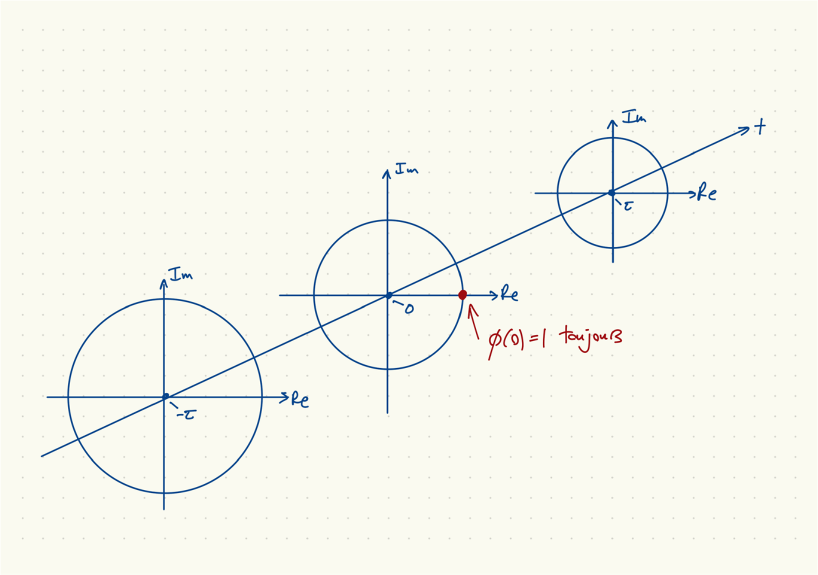
Propriétés de la fonction caractéristique

1. $\phi_X(0) = E[e^0] = 1$, peut importe X.
2. $|\phi_X(t)| = |E[e^{itX}]| \le E[|e^{itX}|] = 1$.
3. Si X et Y sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\phi_{X+Y}(t) &= E[e^{it(X+Y)}] = E[e^{itX}e^{itY}] = E[e^{itX}]E[e^{itY}] \\ &= \phi_X(t)\phi_Y(t).\end{aligned}$$

4. $\phi(t) = E[\cos tX] + iE[\sin tX]$, par linéarité de l'espérance.
5. Pour X réelle,
   a. $\Re(\phi(t)) = E[\cos tX]$ est paire.
   b. $\Im(\phi(t)) = E[\sin tX]$ est impaire.
6. Pour X symétrique ($F(-x) = 1 - F(x)$ au points de continuité), ϕ est réelle.

La fonction caractéristique comme un film



Fonction caractéristique d'une loi $U(a,b)$

$$\phi(t) = E[e^{itX}] = E[\cos tX + i \sin tX] = \frac{1}{b-a} \int_a^b \cos tx + i \sin tx \, dx$$

$$\phi(t) = \frac{1}{t(b-a)} \left[\sin tx - i \cos tx\right]_a^b = \frac{1}{it(b-a)} \left[\cos tx + i \sin tx\right]_a^b$$

$$\phi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

- Cas spécial $a = -\theta, \ b = \theta$:

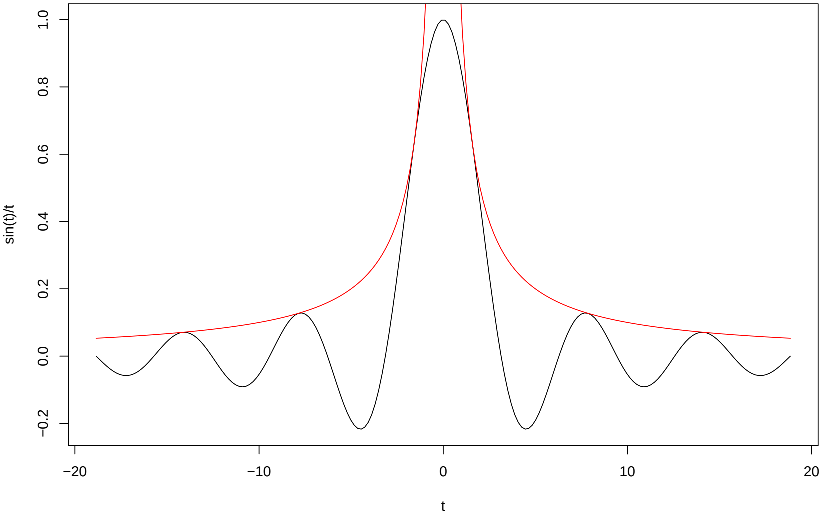
$$\phi(t) = \frac{e^{it\theta} - e^{-it\theta}}{2it\theta} = \frac{\cos t\theta - \cos t\theta + i \sin t\theta + i \sin t\theta}{2it\theta} = \frac{\sin \theta t}{\theta t}.$$

- Cas spécial, $a = -1, \ b = 1$:

$$\phi(t) = \frac{\sin t}{t} \equiv \text{sinc}(t).$$

La fonction sinc

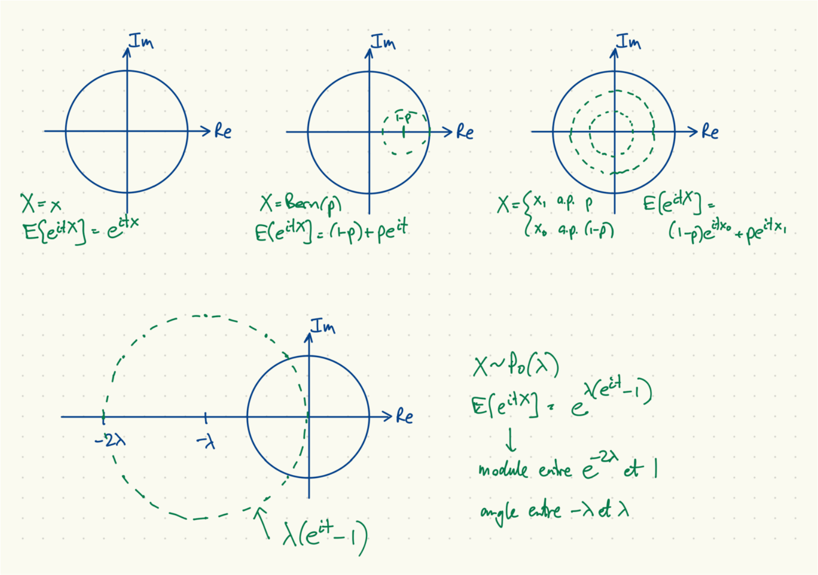
```
t = seq(-6*pi, 6*pi, length.out = 200)
plot(t, sin(t)/t, type='l')
lines(t, 1/abs(t), col='red')
```



Cas discret

1. $X = x$, une constante
$$\phi_X(t) = E[e^{itx}] = e^{itx}.$$
2. $X \sim \mathrm{Bern}(p)$
$$\phi_X(t) = (1-p) + pe^{it}.$$
3. Bernoulli avec valeurs arbitraires
$$X = \begin{cases} x_0 & \text{avec probabilité } (1-p), \\ x_1 & \text{avec probabilité } p. \end{cases}$$
$$\phi_X(t) = E[e^{itX}] = (1-p)e^{itx_0} + pe^{itx_1}.$$
4. Cas spécial $p = 1/2$, $x_0 = -\theta$, $x_1 = \theta$
$$\phi_X(t) = (e^{-i\theta t} + e^{i\theta t})/2 = \cos \theta t.$$
5. $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$
$$\phi_X(t) = \exp[\lambda(e^{it} - 1)].$$

Cas discret, illustrations



Illustration, cas Bernoulli avec valeurs $x_0 = 1$ et $x_1 = 6$

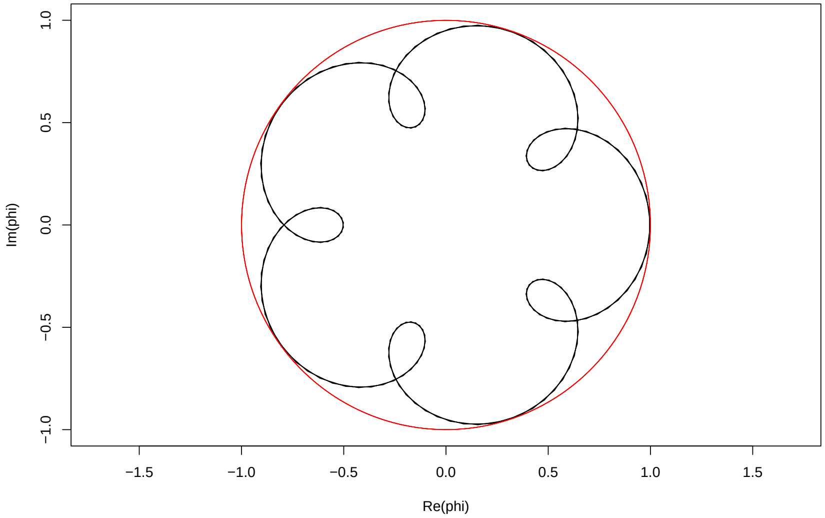
Voici le code pour les trois prochaines figures:

```
t = seq(-2*pi, 2*pi, length.out = 200)
x0 = 1; x1 = 6; p = 0.25
phi = (1-p)*exp(complex(imaginary=t*x0))
phi = phi + p*exp(complex(imaginary=t*x1))

cercle = exp(complex(imaginary=t))
```

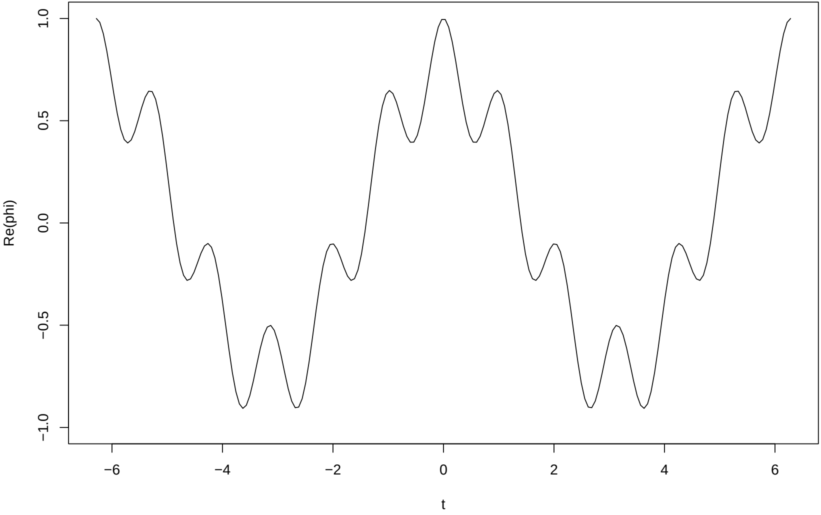
Trajet dans le cercle unitaire

```
plot(Re(phi), Im(phi), type='l', xlim=c(-1,1), ylim=c(-1,1)
lines(Re(cercle), Im(cercle), col='red')
```



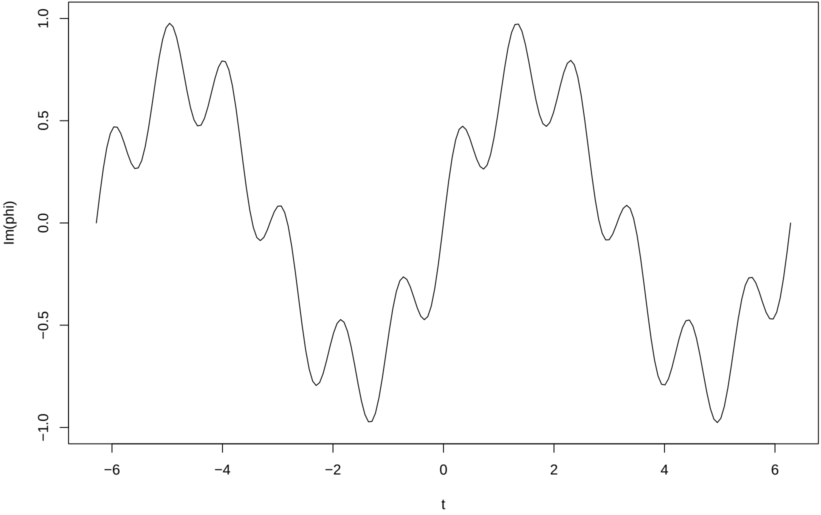
Partie réelle

```
plot(t, Re(phi), type='l', ylim=c(-1,1))
```



Partie imaginaire

```
plot(t, Im(phi), type='l', ylim=c(-1,1))
```



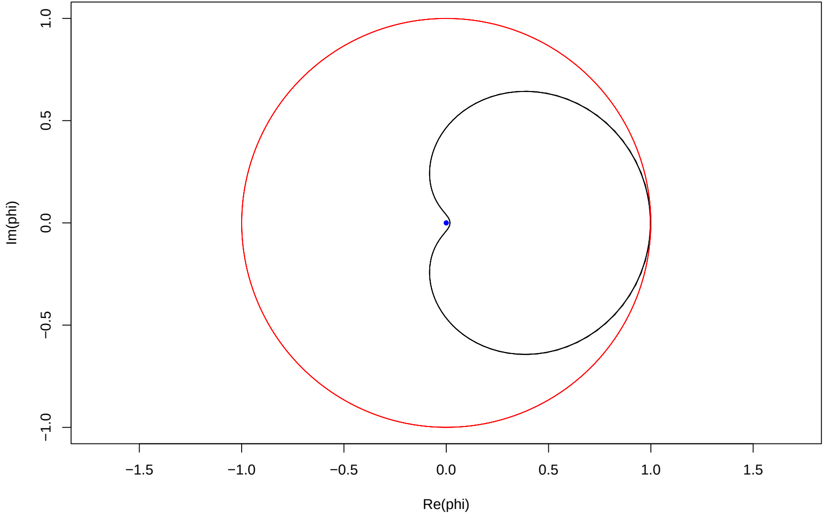
Illustration, cas Poisson, $\lambda = 2$

Voici le code pour les trois prochaines figures:

```
t = seq(-2*pi, 2*pi, length.out = 200)
lambda = 2
phi = exp(lambda*(exp(complex(imaginary = t))-1))
```

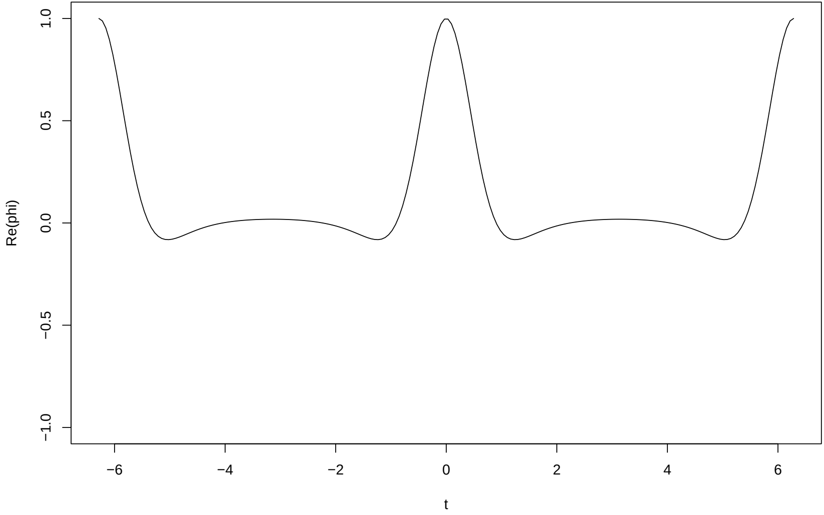
Trajet dans le cercle unitaire

```r
plot(Re(phi), Im(phi), type='l', xlim=c(-1,1), ylim=c(-1,1)
lines(Re(cercle), Im(cercle), col='red')
points(0, 0, col='blue', pch=20)
```



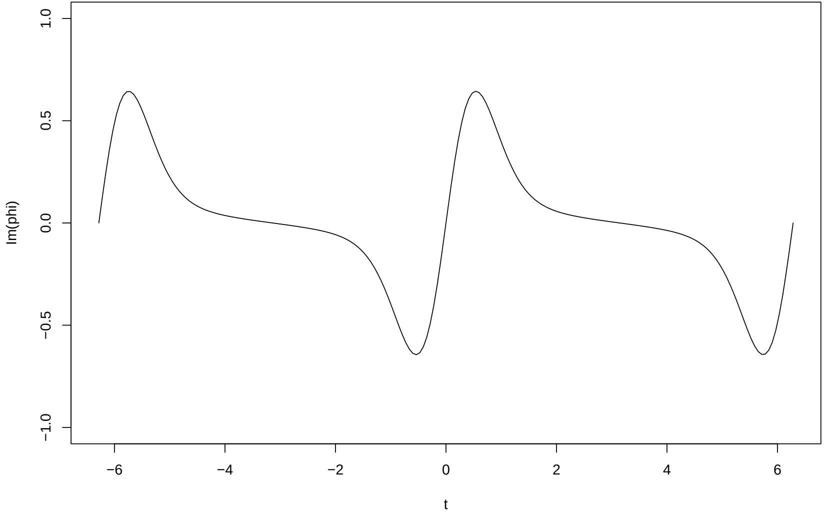
Partie réelle

```
plot(t, Re(phi), type='l', ylim=c(-1,1))
```



Partie imaginaire

```
plot(t, Im(phi), type='l', ylim=c(-1,1))
```



Fonction caractéristique d'une loi $N(0,1)$

- Puisque $\sin(tx)$ est impair et $e^{-x^2/2}$ est pair,

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx \cdot e^{-x^2/2}\, dx.$$

- Dérivée par rapport à t :

$$\phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -\sin tx \cdot xe^{-x^2/2}\, dx$$

- Intégration par parties, $u = -\sin tx$, $dv = xe^{-x^2/2}\, dx$, $du = -t\cos tx$, $v = -e^{-x^2/2}$, donne

$$\phi'(t) = [uv]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t\cos tx \cdot e^{-x^2/2}\, dx = -t\phi(t).$$

- La solution de l'équation différentielle $\log\phi(0) = 0$, $\frac{d\log\phi(t)}{dt} = \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = -t$ est $\log\phi(t) = \int_0^t -s\, ds = -t^2/2$.
- Alors $\phi(t) = e^{-t^2/2}$.

Fonction caractéristique d'une loi $N(\mu, \sigma^2)$

Si $X \sim N(0,1)$ et $Y = \mu + \sigma X$ alors $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ et

$\phi_Y(t) = E[e^{i(\mu+\sigma X)t}] = e^{i\mu t}E[e^{i(t\sigma)X}] = e^{i\mu t}\phi_X(\sigma t) = e^{i\mu t}e^{-\sigma^2 t^2/2}$

La densité de Y, en y, est :

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}\right].$$

Pour $\mu = 0$, la densité a la même forme fonctionnelle, en y, que $\phi_Y(t)$, en t.

Continuité de la fonction caractéristique

$$
\begin{aligned}
|\phi_x(t+h) - \phi_x(t)| &= \left| \int (e^{i(t+h)x} - e^{itx}) \mu(dx) \right| \\
&\leq \int \left| e^{i(t+h)x} - e^{itx} \right| \mu(dx).
\end{aligned}
$$

- Deux bornes qui ne dépend pas de t

$$
\left| e^{i(t+h)x} - e^{itx} \right| \leq h|x|, \qquad \left| e^{i(t+h)x} - e^{itx} \right| \leq 2.
$$

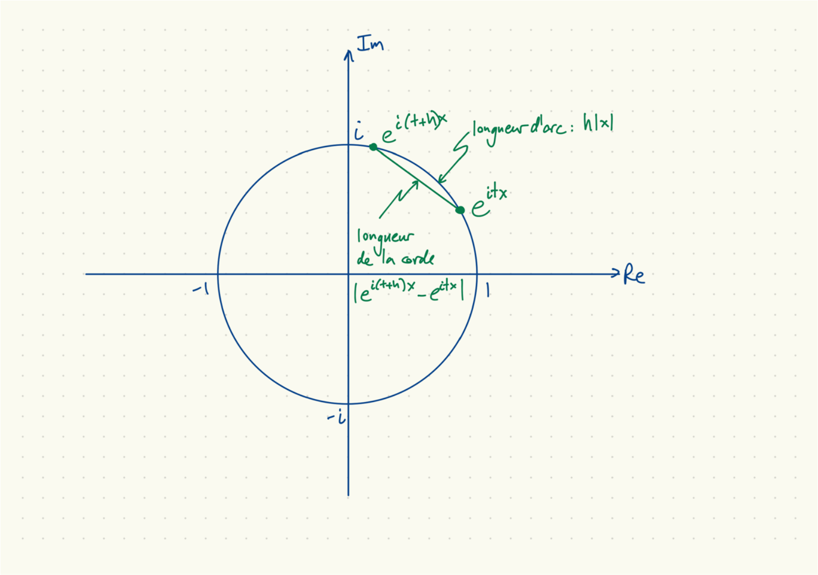
- Selon la deuxième, (convergence dominée)

$$
\lim_{h \downarrow 0} E\left[\left| e^{i(t+h)X} - e^{itX} \right| \right] = E\left[\lim_{h \downarrow 0} \left| e^{i(t+h)X} - e^{itX} \right| \right]
$$

- Selon la première,

$$
E\left[\lim_{h \downarrow 0} \left| e^{i(t+h)X} - e^{itX} \right| \right] = E[0] = 0.
$$

Arc et corde


Im
Re
i
-i
-1
1
$e^{i(t+h)x}$
e^{itx}
longueur d'arc : $h|x|$
longueur de la corde
$|e^{i(t+h)x} - e^{itx}|$

Dérivée de la fonction caractéristique

- Soit X une variable aléatoire, $\phi(t)$ sa fonction caractéristique.
- Résultat : si $E[|X|^k] < \infty$, alors

$$\phi^{(j)}(t) = E[(iX)^j e^{itX}],\ 0 \leq j \leq k$$

- Preuve par induction : fixons k et supposons que $E[|X|^k] < \infty$.
  - $E[(iX)^0 e^{itX}] = E[e^{itX}] = \phi(t) = \phi^{(0)}(t)$, alors vrai pour $j = 0$.
  - Supposez que $\phi^{(j-1)}(t) = E[(iX)^{j-1} e^{itX}]$.
  - $|(iX)^j e^{itX}| = |i|^j |X|^j |e^{itX}| = |X|^j$
  - $E[|X|^k] < \infty \Rightarrow E[|X|^j] < \infty$
  - $\phi^{(j)}(t) = E\left[\frac{d}{dt}(iX)^{j-1} e^{itX}\right] = E[(iX)^j e^{itX}]$
- Génération des moments :

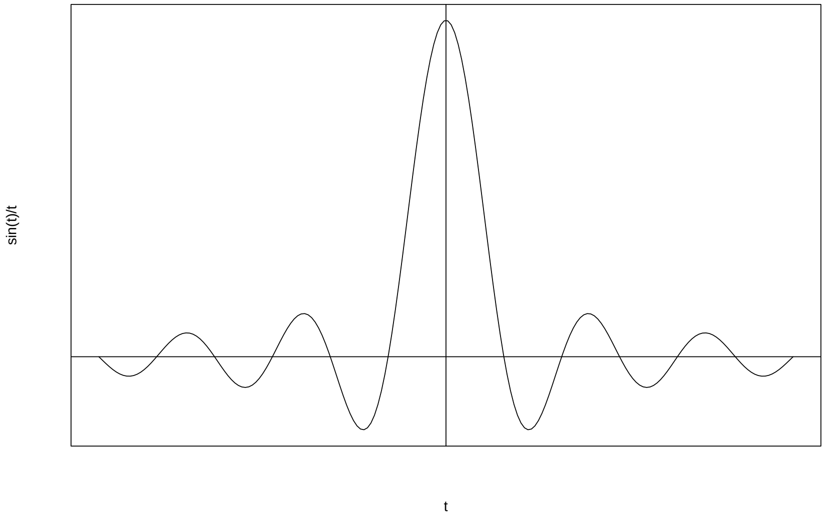
$$\phi^{(j)}(0) = i^j E[X^j]$$

- Attention : $\phi_X(t) = \exp(-\gamma|t|)$ pour X Cauchy symétrique avec paramètre d'échelle γ, n'est pas différentiable à $t = 0$.

Propriétés de la fonction $(\sin\theta t)/t = \theta\mathrm{sinc}(\theta t)$

1. Pour $\theta = 0$, $(\sin\theta t)/t \equiv 0$.
2. Pour $\theta \neq 0$, $t = k\pi/\theta$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$,
$$\frac{\sin\theta t}{t} = 0.$$
3. Pour $\theta \neq 0$,
$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin\theta t}{t} = \frac{\lim_{t\to 0}\theta\cos\theta t}{\lim_{t\to 0} 1} = \theta$$
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sin\theta t}{t} = 0.$$
4. Pour $\theta \neq 0$, la fonction est paire :
$$\frac{\sin\theta(-t)}{-t} = \frac{\sin\theta t}{t}$$
5. Lemme 11.1.3 du livre,
$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} \frac{\sin\theta t}{t}\,dt = \begin{cases} \pi & \theta > 0 \\ 0 & \theta = 0 \\ -\pi & \theta < 0 \end{cases}$$

La fonction $\theta\text{sinc}(\theta t) = (\sin \theta t)/t$



Théorème d'inversion I

- Le théorème : Soit μ une mesure borélienne, $\phi(t)$ sa fonction caractéristique. Si $-\infty < a < b < \infty$ et $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$,

$$\mu([a,b]) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t)\, dt$$

- Puisque

$$\left| \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \right| = \left| \int_a^b e^{-itr}\, dr \right| \le \int_a^b |e^{-itr}|\, dr = b - a < \infty$$

  l'intégral entre $-T$ et T est fini.
- Par Fubini,

$$\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, \mu(dx)\, dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^{T} \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it}\, dt\, \mu(dx).$$

Théorème d'inversion II

La partie imaginaire de l'intégrand est impair, l'intégral est réel,

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)\,dt=\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t(x-a)}{t}-\frac{\sin t(x-b)}{t}\,dt\,\mu($$

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{sign}(x-a)-\mathrm{sign}(x-b)\,\mu(dx).$$

- La valeur de l'intégral est

$$\frac{1}{2}(\mu(\{a\})+\mu(\{b\})+\mu((a,b)).$$

La dualité en cas de $\phi_X(t)$ intégrable

Théorème d'inversion spécial quand $\phi_X(t)$ est intégrable :

X a une densité

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \phi_X(t) dt.$$

Unicité de la fonction caractéristique

- Théorème d'unicité $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y) \Leftrightarrow \phi_X(t) = \phi_Y(t)$
- $\Rightarrow$ de la définition de la fonction caractéristique en termes de μ
- $\Leftarrow$ du théorème d'inversion. Probabilités des intervalles par continuité de probabilité, autres événements par unicité des extensions.

Théorème de continuité

- Soit $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ des mesures boréliennes, $\phi, \phi_1, \phi_2, \ldots,$ leurs fonctions caractéristiques. Alors μ_n converge en loi à μ ssi $\phi_n(t) \to \phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
- Par la définition de convergence en loi et la continuité des fonctions $\cos xt$ et $\sin xt$ en x pour t donné, si μ_n converge en loi à μ, $\phi_n(t) \to \phi(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
- L'autre direction est plus difficile.

La notation petit-o de Landau

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- $f(x) \in o(g(x))$ veut dire $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$.
- Autrement dit :
  - $f(x) = o(g(x))$.
  - f est négligeable devant g asymptotiquement.
  - g est prépondérant devant f asymptotiquement.

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

- $f(n) \in o(g(n))$ veut dire $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 0$.
- Si $f(n) \in o(n^{-1})$,
  - $\lim_{n\to\infty} nf(n) = 0$,
  - $\lim_{n\to\infty}[nf(n)]^i = 0$, $i \in \mathbb{N}$,
  - $\lim_{n\to\infty} n[f(n)]^i = 0$, $i \in \mathbb{N}$,
  - $[f(n)]^i \in o(n^{-i})$, $[f(n)]^i \in o(n^{-1})$.

Théorème centrale limite I

- Supposez que $X_1, X_2, \ldots,$ sont iid, avec moyenne 0, variance 1.
- Soit $Y_n = \sqrt{n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. La fonction caractéristique de Y_n est

$$\phi_n(t) = \phi_X^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[1 + \frac{it}{\sqrt{n}}E[X_1] + \frac{1}{2}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^2 E[X_1^2] + o(n^{-1})\right]^n$$

- Avec $E[X_1] = 0$, $E[X_1^2] = 1$,

$$\phi_n(t) = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + o(n^{-1})\right)^n.$$

$$\log\phi_n(t) = n\log\left(1 - \frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + o(n^{-1})\right) = n\left(-\frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + o(n^{-1})\right)$$

$$\log\phi_n(t) \to -\frac{t^2}{2}$$

$$\phi_n(t) \to e^{-t^2/2}.$$

Théorème centrale limite II

- Si Y est une variable aléatoire $N(0,1)$, sa fonction caractéristique est $\phi(t) = e^{-t^2/2}$.
- Puisque $\phi_n(t) \to \phi(t)$, $\mathcal{L}(Y_n) \Rightarrow \mathcal{L}(Y)$.