ECN 7060, Cours 5

William McCausland

2022-10-06

Inégalité de Markov

- Soit $X \geq 0$ une variable aléatoire, soit $\alpha \in (0, \infty)$.
- Inégalité de Markov :

$$E[X] \geq \alpha P(X \geq \alpha)$$

- Preuve :
  - Soit

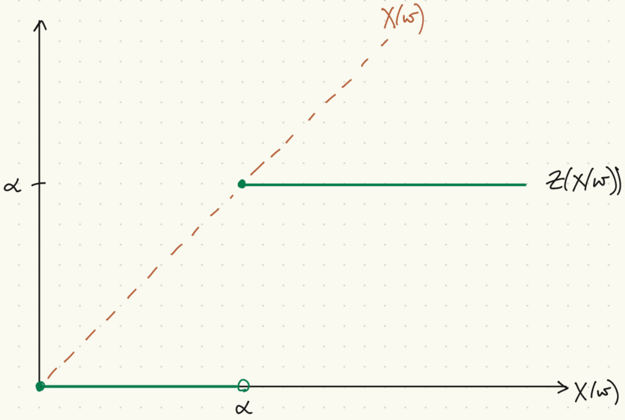
$$Z(\omega) \equiv \begin{cases} 0 & X(\omega) < \alpha, \\ \alpha & X(\omega) \geq \alpha. \end{cases}$$

  - $Z \leq X$ alors par monotonicité,

$$E[Z] = \alpha P(X \geq \alpha) \leq E[X].$$

- Questions :
  1. Pour α donné, décrivez une v.a. $X \geq 0$ qui vérifie l'inégalité en égalité.
  2. Donnez des conditions nécessaires et suffisantes sur α et $X \geq 0$ pour une égalité.

Inégalité de Markov



Inégalité de Chebychev

- Soit Y une variable aléatoire ou $\mu_Y = E[Y]$ existe et est finie.
- Soit $\epsilon > 0$.
- Inégalité de Chebychev :

$$P(|Y - \mu_Y| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathrm{Var}[Y].$$

- Preuve :
  - Soit $X = (Y - \mu_Y)^2$, $\alpha = \epsilon^2$.
  - Alors par l'inégalité de Markov,

$$P(|Y - \mu_Y| \geq \epsilon) = P(X \geq \epsilon^2) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathrm{Var}[Y].$$

- Notes :
  - $\mathrm{Var}[Y] = \infty$ est possible, auquel cas l'inégalité ne contraint pas.
  - ϵ^{-2} peut être très grand, mais c'est fini.
  - Application : $Y = X_n$, où X_n est une suite de v.a. telle que $\mathrm{Var}[X_n] \to 0$. On veut pouvoir choisir n après ϵ.

Définitions de trois modes de convergence

Soit $Z_1, Z_2, \ldots$ une suite de v.a., Z une v.a.

1. Convergence ponctuelle de Z_n à Z : pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{n\to\infty} Z_n(\omega) = Z(\omega).$$

2. Convergence de Z_n à Z presque sûre, $Z_n \overset{p.s.}{\to} Z$:

$$P(\{Z_n \to Z\}) = 1, \text{ ou } P(Z_n \to Z) = 1.$$

3. Convergence de Z_n à Z en probabilité, $Z_n \overset{p}{\to} Z$: pour tout $\epsilon > 0$,

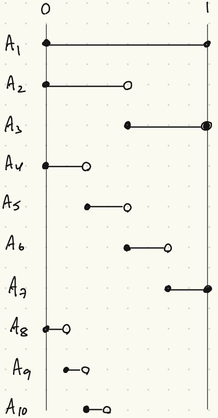
$$P(\{|Z_n - Z| \geq \epsilon\}) \to 0, \text{ ou } P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) \to 0.$$

Souvent en pratique, Z est une constante, ou 0 ou la valeur d'un paramètre.

Convergence en probabilité mais pas convergence p.s.

- Prenez l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ où $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$, P la mesure de Lebesgue.
- Soit $A_1 = \Omega = [0,1]$, $A_2 = [0,1/2)$, $A_3 = [1/2,1]$, $A_4 = [0,1/4)$, $A_5 = [1/4,1/2)$, $A_6 = [1/2,3/4)$, $A_7 = [3/4,1]$, $A_8 = [0,1/8)$, $\ldots$ (prochaine diapo).
- Soit $X = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = 1_{A_n}(\omega)$.
- Convergence presque sûre?
  - Pour tous ω, $\liminf_n X_n(\omega) = 0$, $\limsup_n X_n(\omega) = 1$.
  - Échec de convergence pour tout $\omega \in \Omega$!
  - Alors $P(X_n \to X) = 0$.
- Convergence en probabilité?
  - $P(X_n = X) \geq 1 - 1/n \to 1$.
  - Alors pour tout $\epsilon > 0$, $P(|X_n - X| \geq \epsilon) \to 0$.

Convergence en probabilité mais pas presque sûre.



$\Omega = [0,1]$

$\limsup_n A_n = [0,1]$ $\qquad \limsup \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1 \quad \forall \omega \in \Omega$

$\liminf_n A_n = \emptyset$ $\qquad \liminf_n \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega$

$\mathbb{1}_{A_n}(\omega) \not\to 0 \quad \forall \omega \in \Omega$

mais $\underbrace{P(\mathbb{1}_{A_n}(\omega) > 0)}_{\leq \frac{1}{n},\ = \frac{1}{n} \text{ quand } \log_2 n \text{ est entier}} \to 0$

Une condition suffisante pour convergence p.s.

La condition : pour tout $\epsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) < \infty$.

Preuve de suffisance :

- Supposez que la condition soit vraie. Soit $\epsilon > 0$.
- Alors
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) < \infty,$$
$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=m}^{\infty} P(|Z_k - Z| \geq \epsilon) = 0.$$
- Pour m fixe,
$$\begin{aligned} P(|Z_k - Z| \geq \epsilon \; i.o.) &\equiv P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} |Z_k - Z| \geq \epsilon) \\ &\leq P(\cup_{k=m}^{\infty} |Z_k - Z| \geq \epsilon) \\ &\leq \sum_{k=m}^{\infty} P(|Z_k - Z| \geq \epsilon). \end{aligned}$$
- Puisque m est arbitraire, $P(|Z_n - Z| \geq \epsilon \; i.o.) = 0$.

Preuve, continuée

Rappel : la condition (dite suffisante) de l'avant-dernière diapo entraine $P(|Z_n - Z| \geq \epsilon \ i.o.) = 0$.

Alors (nous utilisons ce résultat à la dernière équation)

$$\begin{aligned} P(\exists \epsilon > 0, |Z_n - Z| \geq \epsilon \ i.o.) &= P(\exists \epsilon' > 0, \epsilon' \in \mathbb{Q}, |Z_n - Z| \geq \epsilon' \ i.o.) \\ &= P(\cup_{\epsilon \in \mathbb{Q}, \epsilon > 0} |Z_n - Z| \geq \epsilon \ i.o.) \\ &\leq \sum_{\epsilon \in \mathbb{Q}, \epsilon > 0} P(|Z_n - Z| \geq \epsilon \ i.o.) = 0. \end{aligned}$$

Alors

$$P(\forall \epsilon > 0, |Z_n - Z| < \epsilon \ a.a.) = 1,$$

$$P(Z_n \to Z) = 1.$$

Infiniment souvent et presque toujours

		$\omega \in A_c$		
		finiment souvent	infiniment souvent pas presque toujours	presque toujours
	finiment souvent			✓
$\omega \in A_n$	infiniment souvent pas presque toujours		✓	
	presque toujours	✓		

Convergence presque sûre $\rightarrow$ convergence en probabilité

Preuve :

- Supposez que $P(Z_n \rightarrow Z) = 1$ (convergence p.s.).
- Soit $\epsilon > 0$.
- Soit $A_n = \{\exists m \geq n, |Z_m - Z| \geq \epsilon\}$.
- Alors

$$A_n \searrow \cap_n A_n \subseteq \{Z_n \not\rightarrow Z\}.$$

$$P(A_n) \rightarrow P(\cap_n A_n) \leq P(Z_n \not\rightarrow Z) = 0.$$

$$P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) \leq P(A_n) \rightarrow 0.$$

- Puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire, pour tout $\epsilon > 0$, $P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) \rightarrow 0$ (convergence en probabilité).

Deux exemples

Soit $Y = Z = 0$, Y_n, Z_n des suites de v.a. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telles que

- $\Pr[Y_n = 0] = 1 - 1/n^2$, $\Pr[Y_n = 1] = 1/n^2$.
- $\Pr[Z_n = 0] = 1 - 1/n$, $\Pr[Z_n = 1] = 1/n$.

Par exemple, sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$, où $P((a, b]) = \min(b, 1) - \max(a, 0)$ pour $b \geq a$,

- $Y_n = 1_{[0,1/n^2]}$
- $Z_n = 1_{[0,1/n]}$

Deux exemples, suite

Pour la suite Y_n :

- $\Pr[Y_n \neq Y] = 1/n^2 \to 0$ alors $Y_n \xrightarrow{p} Y$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr[Y_n \neq Y] = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6 < \infty$ alors $Y_n \xrightarrow{a.s.} Y$.

Pour la suite Z_n :

- $\Pr[Z_n \neq Z] = 1/n \to 0$ alors $Z_n \xrightarrow{p} Z$.
- Mais $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr[|Z_n - Z| \geq 1] = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$.
- Si $Z_n = 1_{[0,1/n]}$ et P est la mesure de Lebesgue sur $\Omega = [0,1]$, (comme dans l'exemple de la diapo précédente) $P(Z_n \to Z) = 1$ (la condition est suffisante, pas nécessaire).
- Par contre, si les Z_n sont indépendants, par Borel-Cantelli (ii)

$$P(|Z_n - Z| = 1 \; i.o.) = 1, \quad P(Z_n \to Z) = 0.$$

Une faible loi de grands nombres

- Une faible loi de grands nombres :
  - Soit $X_1, X_2, \ldots$ des v.a. indépendents, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.
  - Supposez que pour tous n, $E[X_n] = m < \infty$ et $\mathrm{Var}[X_n] < v < \infty$.
  - Alors $S_n \xrightarrow{p} m$.
- Preuve :
  - Pour tous n, $E[S_n] = m$ et $\mathrm{Var}[S_n] \leq v/n$.
  - Par l'inégalité de Chebyshev, $P(|S_n - m| \geq \epsilon) \leq \frac{v}{n}\frac{1}{\epsilon^2} \to 0$.

Une forte loi de grands nombres

- Une forte loi de grands nombres
  - Soit $X_1, X_2, \ldots$ des v.a. indépendents, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
  - Supposez que pour tous n, $E[X_n] = m < \infty$, $E[(X_n - m)^4] \leq a < \infty$.
  - Alors $P(S_n \to m) = 1$.

Preuve, forte loi de grands nombres

- Notez que $(X_i(\omega) - m)^2 \leq (X_i(\omega) - m)^4 + 1$ pour tout $\omega \in \Omega$.
- Alors $v \equiv E[(X_i - m)^2] \leq a + 1 < \infty$.
- Supposez que $m = 0$, sans perte de généralité.
- Remarquez que $S_n^4 = \frac{1}{n^4} \sum_{i,j,k,l} X_i X_j X_k X_l$.
- Alors

$$
\begin{aligned}
E[S_n^4] &= \frac{1}{n^4} \sum_{i,j,k,l} E[X_i X_j X_k X_l] \\
&= \frac{1}{n^4} \left[\sum_i E[X_i^4] + \binom{4}{2} \sum_i \sum_{j>i} E[X_i^2 X_j^2] \right] \\
&\leq \frac{1}{n^4} (na + 3n(n-1)v^2).
\end{aligned}
$$

- Alors

$$
P(|S_n| \geq \epsilon) = P(|S_n|^4 \geq \epsilon^4) \leq \frac{a + 3v^2}{n^2 \epsilon^4}
$$

et la somme suivante converge : $\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \geq \epsilon) < \infty$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

- Soit X et Y des v.a. telles que $E[X^2] < \infty$ et $E[Y^2] < \infty$.
- Alors
$$E[|XY|] \leq \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}.$$
- Preuve : Soit $X_0 = |X|/\sqrt{E[X^2]}$, $Y_0 = |Y|/\sqrt{E[Y^2]}$.
    - $0 \leq E[(X_0 - Y_0)^2] = E[X_0^2 + Y_0^2 + 2X_0 Y_0] = 2 - 2E[X_0 Y_0]$
    - $E[X_0 Y_0] \leq 1$
    - $E[|XY|] \leq \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$

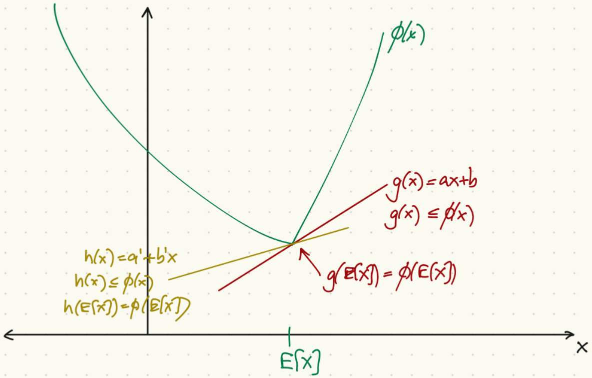
Inégalité de Jensen

- Soit $\phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe.
- Soit X une v.a. avec $E[X]$ fini.
- Par la convexité de ϕ, il y une fonction $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
  - $g(x) = ax + b$
  - $g(x) \leq \phi(x)$
  - $g(E[X]) = \phi(E[X])$
- Il est possible que ϕ n'ait pas de dérivée à $E[X]$, auquel cas g n'est pas unique.
- L'inégalité de Jensen :

$$E[\phi(X)] \geq E[g(X)] = aE[X] + b = \phi(E[X]).$$

- Note : Si g n'est pas unique, tous les choix donnent le même résultat.

Inégalité de Jensen



Applications de l'inégalité de Jensen

1. Kurtosis K, s'il existe, vérifie $K \geq 1$, où

$$K \equiv \frac{E[(Z-\mu)^4]}{E[(Z-\mu)^2]^2}.$$

Supposons que les quatre premiers moments existent et sont finis. Soit $Y = Z - \mu$. Prenez $\phi(x) = x^2$, $X = Y^2$.

2. Kurtosis d'un mélange-échelle Z de v.a. gaussiennes. Soit $Y = Z - \mu$, σ^2 la variance aléatoire.

$$E[Y^4] = E[E[Y^4|\sigma^2]] = E[3\sigma^4] \geq 3E[\sigma^2]^2,$$

$$E[Y^2] = E[E[Y^2|\sigma^2]] = E[\sigma^2],$$

$$K = E[Y^4]/(E[Y^2])^2 \geq 3.$$

Première équation : $X = \sigma^2$, $\phi(x) = x^2$.

3. La fonction d'utilité $u(x)$ concave, richesse X. $(\phi(x) = -u(x))$

$$-E[u(X)] = E[-u(X)] \geq -u(E[X]), \quad u(E(X)) \geq E[u(X)].$$

Une note sur les fonctions de répartition

- La fonction de répartition : $F(x) \equiv P((-\infty, x])$.
- Monotonicité de F par monotonicité de probabilité.
- Continuité à droite :
$x_n \searrow x$, $x_n > x \Rightarrow (-\infty, x_n] \searrow (-\infty, x] \Rightarrow F(x_n) \to F(x)$,
par continuité de probabilité.
- Continuité à gauche? : $x_n \nearrow x$, $x_n < x \Rightarrow (-\infty, x_n] \nearrow (-\infty, x) \Rightarrow F(x_n) \to F(x) - P(\{x\})$.
- $\lim_{x\to\infty} F(x) = P(\Omega) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = P(\emptyset) = 0$ par continuité de probabilité.

Aperçu des chapîtres 9 et 10

- Chapître 9
  - Lemme de Fatou
  - Théorème de convergence dominée, une méthode plus flexible de démontrer $\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$.
  - Deux applications : les dérivées des espérances, la fonction génératrice des moments.
- Chapître 10
  - Convergence faible, ou en loi