ECN 7060, Cours 4

William McCausland

2022-09-28

Intégration riemannienne

$$L\int_a^b X \equiv \sup_{n,t_1,\ldots,t_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \inf_{t\in[t_{i-1},t_i]} X(t) \colon t_0 < t_1 < \ldots < t_n \right\}$$

$$U\int_a^b X \equiv \inf_{n,t_1,\ldots,t_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} X(t) \colon t_0 < t_1 < \ldots < t_n \right\},$$

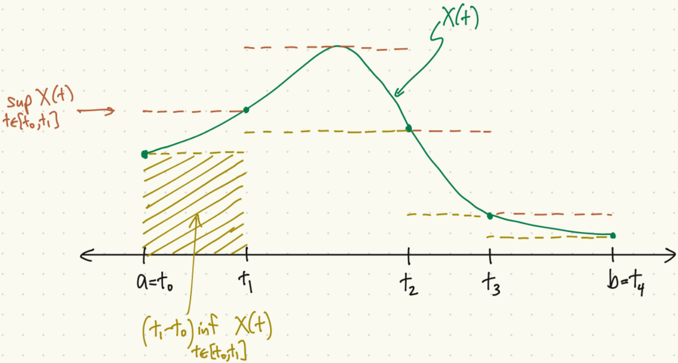
où $t_0 = a,\ t_n = b$.

Notes :

- $L\int_a^b X$ et $U\int_a^b X$ existent toujours, valeurs $\pm\infty$ sont possibles.
- Quand $L\int_a^b X = U\int_a^b X$, l'intégrale riemannienne existe et

$$\int_a^b X(\omega)\, d\omega \equiv L\int_a^b X = U\int_a^b X.$$

Les intégrales L et U, $a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = b$ fixe



Extensions de l'intégration riemannienne

Intervalle non-borné

$$\int_0^\infty X(t)\,dt \equiv \lim_{b\to\infty} \int_0^b X(t)\,dt,$$

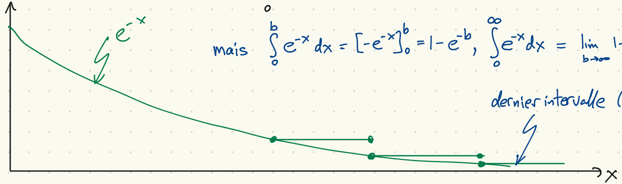
Une singularité à a et/ou à b

$$\int_a^b X(t)\,dt = \lim_{c\downarrow a} \lim_{d\uparrow b} \int_c^d X(t)\,dt.$$

Deux cas où il faut des limites

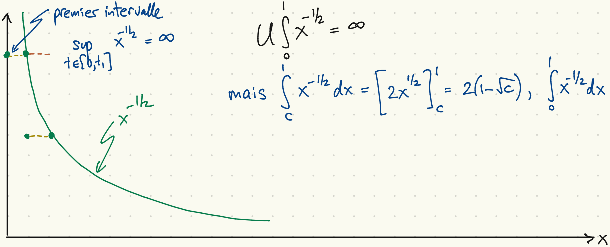
$$U\int_0^\infty e^{-x} = \infty$$

mais $\int_0^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = 1-e^{-b}$, $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} 1-e^{-b} = 1$



$$U\int_0^1 x^{-1/2} = \infty$$

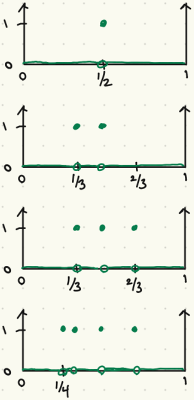
mais $\int_c^1 x^{-1/2}\,dx = \left[2x^{1/2}\right]_c^1 = 2(1-\sqrt{c})$, $\int_0^1 x^{-1/2}\,dx = \lim_{c\downarrow 0} 2(1-\sqrt{c}) = 2$



Problèmes pour l'intégration riemannienne

- $L\int_0^1 1_{\mathbb{Q}} = 0$ et $U\int_0^1 1_{\mathbb{Q}} = 1$, donc l'intégrale riemannienne n'existe pas.
- Soit $\mathbb{Q}_n$ l'ensemble des n premiers rationnels dans $[0,1]$. (L'ordre n'est pas importante.)
- Pour tous n, $L\int_0^1 1_{\mathbb{Q}_n} = U\int_0^1 1_{\mathbb{Q}_n} = 0$.
- Notez que
  - $\lim_{n\to\infty} 1_{\mathbb{Q}_n}(t) = 1_{\mathbb{Q}}(t)$ pour tous $t \in [0,1]$,
  - $0 = \lim_{n\to\infty} U\int_0^1 1_{\mathbb{Q}_n} \neq U\int_0^1 1_{\mathbb{Q}} = 1$.
  - $1_{\mathbb{Q}_n}(t) \leq 1_{\mathbb{Q}_{n+1}}(t)$ pour tous $t \in [0,1]$,

Les fonctions $\mathbb{1}_{Q_n}$



$$\mathbb{1}_{Q_1}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in \{1/2\} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$\mathbb{1}_{Q_2}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in \{1/2, 1/3\} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$\mathbb{1}_{Q_3}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in \{1/2, 1/3, 2/3\} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$\mathbb{1}_{Q_4}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in \{1/2, 1/3, 2/3, 1/4\} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Delta de Dirac

- δ de Dirac comme pansement lorsqu'il y a des points avec probabilité positive : défini comme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) g(t)\, dt = g(0),$$

et pour tous $t \neq 0$,

$$\delta(t) = 0.$$

Une variable aléatoire simple sur $\Omega = [0, 1]$

- Trois façons d'écrire la même variable aléatoire simple X :

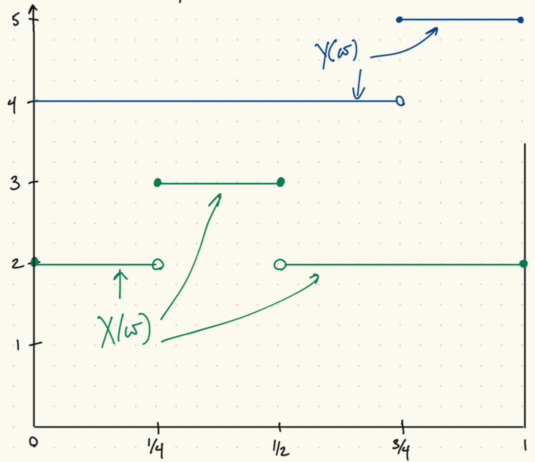
  1. $X(\omega) = 2 \cdot 1_{[0,1/4)\cup(1/2,1]}(\omega) + 3 \cdot 1_{[1/4,1/2]}(\omega)$
  2. $X(\omega) = 2 \cdot 1_{[0,1/4)}(\omega) + 2 \cdot 1_{(1/2,1]}(\omega) + 3 \cdot 1_{[1/4,1/2]}(\omega)$
  3. $X(\omega) = 2 \cdot 1_{\Omega}(\omega) + 1 \cdot 1_{[1/4,1/2]}(\omega)$

- Chaque cas est de la forme $\sum_{i=1}^{n} x_i 1_{A_i}(\omega)$.
- L'image de Ω par X est $\{x_1, x_2\} = \{2, 3\}$, un ensemble fini.
- Dans 1, X est de la forme canonique

$$X(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot 1_{\{X^{-1}(\{x\})\}}(\omega).$$

- Dans 2, X n'est pas de cette forme, mais $[0, 1/4)$, $[1/4, 1/2]$ et $(1/2, 1]$ forment une partition de $[0, 1]$ en intervalles.
- Dans 3, $\{[0, 1], [1/4, 1/2]\}$ n'est pas une partition de $[0, 1]$.

Les fonctions X et Y



Une variable aléatoire simple sur $\Omega = [0,1]^2$

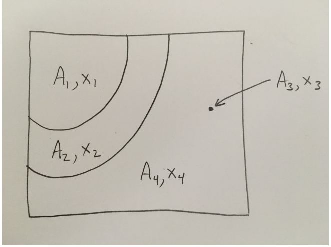


Figure 1: Une variable aléatoire simple

Ici,

$$X(\omega) = \begin{cases} x_1 & \omega \in A_1 \\ x_2 & \omega \in A_2 \\ x_3 & \omega \in A_3 \\ x_4 & \omega \in A_4. \end{cases}$$

En général (mais pas avec la mesure de Lebesgue), $P(A_3) > 0$ est possible.

L'espérance d'une variable aléatoire

- Pour une variable aléatoire simple ($X(\Omega)$ est fini):

$$E[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X^{-1}(\{x\})).$$

- Pour une variable aléatoire non-négative :

$$E[X] = \sup\{E[Y] \colon Y \leq X,\ Y \text{ simple}\}.$$

- Pour une variable aléatoire générale :

$$E[X] = E[X^+] - E[X^-].$$

- Notes :
  - Cohérence des trois définitions.
  - Valeurs possibles; quand la troisième n'est pas bien définie.

Formes non-canoniques d'une variable aléatoire simple

- Soit X une variable aléatoire simple.
- Il y a des formes $X = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{A_i}(\omega)$ non-canoniques.
- Mais $\sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i) = E[X]$ toujours, par l'additivité de P.

L'espérance de la fonction irrégulière 1_Q est bien définie

- Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace de probabilité $([0,1], \mathcal{B}, \mu)$ où μ est la mesure de Lebesgue.
- Pour tout n,

$$E[1_{\mathbb{Q}_n}] = 1 \cdot \mu(\mathbb{Q}_n) + 0 \cdot \mu(\Omega \backslash \mathbb{Q}_n) = 0.$$

- $1_{\mathbb{Q}}$ est une v.a. simple! Par additivité dénombrable,

$$E[1_{\mathbb{Q}}] = 1 \cdot \mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]) + 0 \cdot \mu(\mathbb{Q}^c \cap [0,1]) = 0.$$

- Rappel : pour l'intégration riemannienne, $U \neq L$, échec de convergence monotone.

Linéarité de l'espérance, variables aléatoires simples I

Même $X(\omega)$ sur $\Omega = [0, 1]$ qu'on a vu avant :

$$X(\omega) = \begin{cases} 2 & \omega \in A_1 \equiv [0, 1/4), \\ 3 & \omega \in A_2 \equiv [1/4, 1/2], \\ 2 & \omega \in A_3 \equiv (1/2, 1]. \end{cases}$$

Une autre variable aléatoire $Y(\omega)$ sur Ω :

$$Y(\omega) = \begin{cases} 4 & \omega \in B_1 = [0, 3/4), \\ 5 & \omega \in B_2 \equiv [3/4, 1]. \end{cases}$$

Toutes les intersections $A_i \cap B_j$:

	$A_1 = [0, 1/4)$	$A_2 = [1/4, 1/2]$	$A_3 = (1/2, 1]$
$B_1 = [0, 3/4)$	A_1	A_2	$(1/2, 3/4)$
$B_2 = [3/4, 1]$	$\emptyset$	$\emptyset$	B_2

Linéarité de l'espérance, variables aléatoires simples II

- Soit $X = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{A_i}(\omega)$ et $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i 1_{B_i}(\omega)$ des variables aléatoires simples.
- Alors

$$
\begin{aligned}
E[aX + bY] &= E\left[\sum_{i,j} (ax_i + by_j) 1_{A_i \cap B_j}\right] \\
&= \sum_{i,j} (ax_i + by_j) P(A_i \cap B_j) \\
&= a \sum_i x_i \sum_j P(A_i \cap B_j) + b \sum_j y_j \sum_i P(A_i \cap B_j) \\
&= a \sum_i x_i P(A_i) + b \sum_j y_j P(B_j) \\
&= aE[X] + bE[Y].
\end{aligned}
$$

- Même si les expressions pour X et Y sont canoniques, l'expression pour $aX + bY$ ne l'est pas forcément.

Monotonicité, variables aléatoires simples

Résultat : pour des variables aléatoires simples X et Y,

$$X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y].$$

Preuve :

$$\begin{aligned} X \leq Y &\Rightarrow Y - X \geq 0 \\ &\Rightarrow E[Y - X] \geq 0 \\ &\Rightarrow E[Y] - E[X] \geq 0 \\ &\Rightarrow E[X] \leq E[Y] \end{aligned}$$

Conclusion immédiate : la définition suivante est cohérente.

Pour toute variable aléatoire $X \geq 0$,

$$E[X] \equiv \sup_{Y \leq X,\, Y \,\text{simple}} E[Y].$$

Monotonicité, variables aléatoires non-négatives

- Soit X, Y des variables aléatoires non-négatives, $X \leq Y$.
- $E[X] = \sup_{Z \leq X,\, Z\,\text{simple}} E[Z]$
- $E[Y] = \sup_{Z \leq Y,\, Z\,\text{simple}} E[Z]$
- $E[X]$ est le sup d'un ensemble plus petit, alors $E[X] \leq E[Y]$.

Espérances des variables aléatoires arbitraires

- Soit X une variable aléatoire arbitraire.
- Soit $X^+(\omega) = \max(X(\omega), 0)$, $X^-(\omega) = \max(-X(\omega), 0)$.
- X^+ et X^- sont des variables aléatoires non-négatives.
- $X^+ - X^- = X$.
- Soit $v^+ \equiv E[X^+]$, $v^- \equiv E[X^-]$.
- $E[X]$ défini par :

$E[X^+]$	$E[X^-]$	$E[X]$
$v^+ < \infty$	$v^- < \infty$	$v^+ - v^-$
$v^+ = \infty$	$v^- < \infty$	∞
$v^+ < \infty$	$v^- = \infty$	$-\infty$
$v^+ = \infty$	$v^- = \infty$	pas défini

- Attention : la valeur d'un sup, inf ou lim peut être ∞ ou $-\infty$, même si la valeur d'une v.a. est toujours finie.

Les espérances et les intégrales impropres

Quelques choses à noter dans la définition, pour $X \geq 0$,

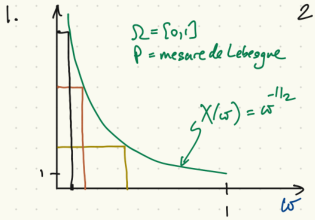
$$E[X] = \sup\{E[Y]\colon\ Y \leq X,\ Y \text{ simple}\}.$$

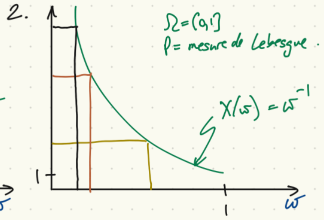
- Un seul sup/inf/limite.
- L'importance de $X \geq 0$ et l'unidirectionnalité (cf. L et U pour l'intégration riemannienne)
- Aucune définition spéciale pour les singularités ou pour $\Omega = \mathbb{R}$.
- Pas besoin d'un pansement comme le δ de Dirac.

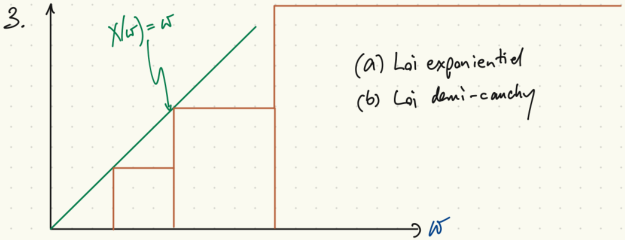
Exemples :

1. $X(\omega) = 1/\sqrt{\omega}$, mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.
2. $X(\omega) = 1/\omega$, mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.
3. $X(\omega) = \omega$, loi exponentielle sur $\mathbb{R}_+$.
4. $X(\omega) = \omega$, loi demi-cauchy sur $\mathbb{R}_+$.
5. X de la Figure 4.2.1.

Singularités et régions d'intégration non-bornées







(a) Loi exponentiel

(b) Loi demi-cauchy

Convergence monotone de X_n simple à X non-négative

- Les fonctions $\Psi_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\Psi_n(x) = \min(n, 2^{-n}\lfloor 2^n x \rfloor).$$

- Propriétés de $\Psi_n(x)$:
  - $0 \leq \Psi_n(x) \leq x$, $x \geq 0$.
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Psi_n(x) \nearrow x$.
  - Pour tout n, $\Psi_n(\mathbb{R})$ est fini.
- Construction $X_n(\omega) = \Psi_n(X(\omega))$.
- Propriétés de X_n :
  - X_n est simple
  - $X_n \leq X_{n+1} \leq X$
  - $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$.
  - $E[X_n] \leq E[X]$ (définition de $E[X]$)
  - $\lim_{n\to\infty} E[X_n] \leq E[X]$
- Pourquoi pas $\Psi_n(x) = \min(n, n^{-1}\lfloor nx \rfloor)$? $\Psi_n(x) = 2^{-n}\lfloor 2^n x \rfloor)$?
- Remarquez la discrétisation de $X(\Omega)$, pas Ω.

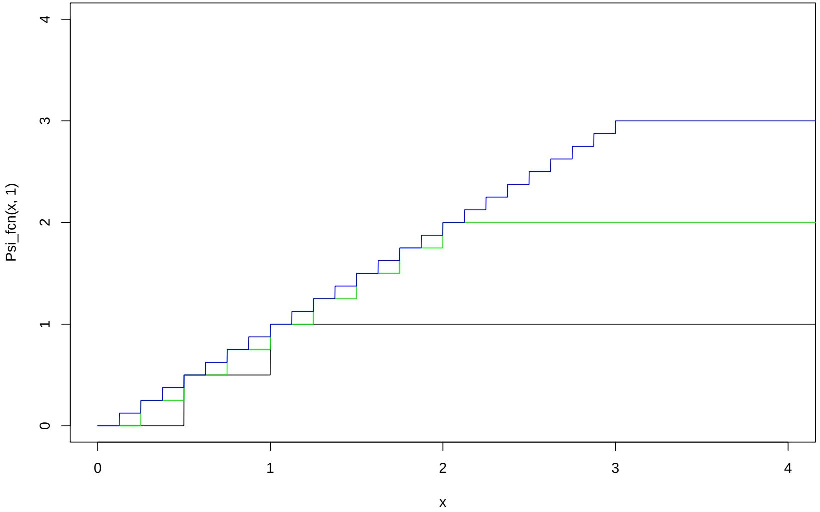
La fonction $\Psi_n(x)$

```r
Psi_fcn <- function(x, n)
{
  result <- pmin(n, 2^(-n)*floor(2^n*x))
}

x <- seq(0, 5, by=2^(-10))
y1 = Psi_fcn(x, 1)
y2 = Psi_fcn(x, 2)
y3 = Psi_fcn(x, 3)
```

Graphique de la fonction $\Psi_n(x)$, $n = 1, 2, 3$

```
plot(x, Psi_fcn(x, 1), 'l', xlim=c(0, 4), ylim=c(0, 4))
lines(x, Psi_fcn(x, 2), col='green')
lines(x, Psi_fcn(x, 3), col='blue')
```



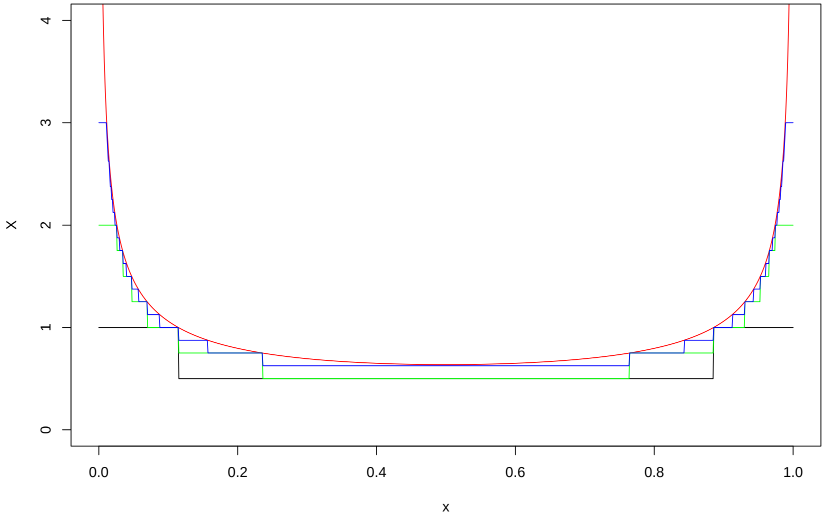
Des variables aléatoires X, X_1, X_2, X_3

```
f <- function(x)
{
  (1/gamma(0.5)^2) * x^-0.5 * (1-x)^-0.5
}

x = seq(0, 1, by=2^(-10))
X = f(x)
X1 = Psi_fcn(f(x), 1)
X2 = Psi_fcn(f(x), 2)
X3 = Psi_fcn(f(x), 3)
```

Graphique des fonctions X, X_1, X_2, X_3

```
plot(x, X, 'l', col='red', ylim=c(0,4))
lines(x, X1, col='black'); lines(x, X2, col='green');
lines(x, X3, col='blue')
```



Théorème de convergence monotone

- Théorème : supposez que $X_1, X_2, \ldots$ sont des variables aléatoires non-négatives avec $X_n(\omega) \nearrow X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Alors X est une variable aléatoire et $E[X] = \lim_{n\to\infty} E[X_n]$.
- Remarques :
  - les X_n ne sont pas forcément simples.
  - pour une variable aléatoire $X \geq 0$ donnée, on peut construire une suite $X_1, X_2, \ldots$ avec les propriétés ci-haut.
- Par monotonicité, $E[X_1] \leq E[X_2] \leq \ldots \leq E[X]$ et en conséquence immédiate,

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] \leq E[X].$$

- Attention : $E[X_n] = \infty$, $E[X] = \infty$ possible.
- Il reste à prouver que $\lim_{n\to\infty} E[X_n] \geq E[X]$.

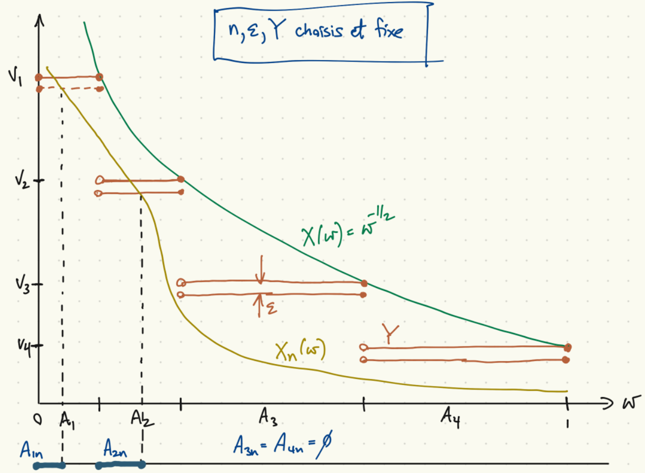
Preuve de $\lim_{n\to\infty} E[X_n] \geq E[X]$

- Soit Y simple, $Y \leq X$ (alors $E[Y] \leq E[X]$). Soit $\epsilon > 0$.
- $Y = \sum_i v_i 1_{A_i}$ où $\{A_i\}$ est une partition de Ω en événements et $v_i \leq X(\omega)$ pour tous $\omega \in A_i$.
- Pour tout i et n, soit $A_{in} \equiv \{\omega \in A_i \colon X_n(\omega) \geq v_i - \epsilon\}$.
- Alors pour tout i, $\{A_{in}\} \nearrow A_i$. (monotonicité, convergence)
- Aussi $E[X_n] \geq \sum_i (v_i - \epsilon) P(A_{in})$. (à droite : $E[Y_n]$, Y_n simple)
- Par convergence de probabilité :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_i (v_i - \epsilon) P(A_{in}) = \left(\sum_i v_i P(A_i) \right) - P(\cup_i A_i)\epsilon = E[Y] - \epsilon,$$

- Alors $lim_{n\to\infty} E[X_n] \geq E[Y] - \epsilon$.
- $\epsilon > 0$ est arbitraire alors $\lim_{n\to\infty} E[X_n] \geq E[Y]$.
- Y est arbitraire, alors $\lim_{n\to\infty} E[X_n] \geq E[X]$.

Convergence monotone. (preuve)



Remarques

- On peut affaiblir la condition $X_n(\omega) \nearrow X(\omega)$ en
$$P(\{X_n(\omega) \nearrow X(\omega)\}) = 1.$$
- Autrement dit, $X_n \nearrow X$ presque surement.
- Importance de monotonicité, positivité
- Rappel : échec de convergence monotone pour l'intégration riemannienne
- Linéarité de $E[\cdot]$ pour variables aléatoires positives : soit $X_n = \Psi_n(X)$, $Y_n = \Psi_n(Y)$, $a, b \geq 0$. Alors
$$\begin{aligned} E[aX + bY] &= \lim_n E[aX_n + bY_n] \\ &= \lim_n aE[X_n] + bE[Y_n] = aE[X] + bE[Y]. \end{aligned}$$

Aperçu des chapitres 5 et 6

- Chapitre 5
  - Inégalités de Markov, Chebychev, Cauchy-Schwarz, Jensen
  - Convergence presque sur, convergence en probabilité
  - Lois de grand nombres
- Chapitre 6
  - Lois, fonctions de répartition, de densité