

ECN 7060, Cours 2

William McCausland

2021-09-08

Plan de route, Chapitre 2

- ▶ 2.1 Définition d'un espace de probabilité
- ▶ 2.2 Construction de (Ω, \mathcal{F}, P) pour Ω indénombrable, une spécification suffisante (une semi-algèbre \mathcal{J} et un $P: \mathcal{J} \rightarrow [0, 1]$ avec superadditivité plus monotonie dénombrable) pour $\Omega = [0, 1]$
- ▶ 2.3 Théorème d'extension : un outil pour construire \mathcal{F}, P
- ▶ 2.4 Application du théorème pour $\Omega = [0, 1]$.
- ▶ 2.5 Variations du théorème (conditions alternatives)
- ▶ 2.6 Application du théorème pour d'autres Ω

Théorème d'extension

Application : spécifier Ω , semi-algèbre \mathcal{J} , $P: \mathcal{J} \rightarrow [0, 1]$, obtenir (Ω, \mathcal{F}, P) .

Conditions sur Ω , \mathcal{J} et $P: \mathcal{J} \rightarrow [0, 1]$:

1. \mathcal{J} est une semi-algèbre sur Ω , c'est à dire
 - a. $\emptyset \in \mathcal{J}$, $\Omega \in \mathcal{J}$,
 - b. \mathcal{J} est stable pour les intersections finies,
 - c. Si $A \in \mathcal{J}$, A^c est une réunion disjointe finie des éléments de \mathcal{J} .
2. P est finiment superadditive.
3. P est dénombrablement monotone.

Conclusion : il y a une tribu \mathcal{M} sur Ω et une probabilité P^* sur \mathcal{M} telles que

1. $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{M}$,
2. $P^*(A) = P(A)$ pour chaque $A \in \mathcal{J}$.

Deux tribus pour $\Omega = \mathbb{R}$ (Exercice 2.4.5)

- ▶ Un intervalle de \mathbb{R} est n'importe $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ ou (a, b) , où $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. (Si $a > b$, l'intervalle est vide.)
- ▶ Soit $\mathcal{A}_2 = \{\text{tous intervalles de } \mathbb{R}\}$.
 - ▶ \mathcal{A}_2 est-elle une semi-algèbre?
 - ▶ \mathcal{A}_2 plus toutes les réunions dénombrables n'est pas une tribu.
 - ▶ La spécification de $P: \mathcal{A}_2 \rightarrow [0, 1]$ est toujours difficile.
- ▶ Soit $\mathcal{B} \equiv \sigma(\mathcal{A}_2)$, la tribu la plus petite qui contient \mathcal{A}_2 .
- ▶ Soit $\mathcal{A}_1 = \{(-\infty, x]: x \in \mathbb{R}\}$.
 - ▶ \mathcal{A}_1 est-elle une semi-algèbre?
 - ▶ Pourquoi \mathcal{A}_1 est-elle utile?
- ▶ Prochaine diapos : montrez que $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{B}$.

Démonstration de $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{B} \equiv \sigma(\mathcal{A}_2)$

- ▶ $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ alors $\sigma(\mathcal{A}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_2)$.
- ▶ L'autre direction, $\sigma(\mathcal{A}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$:
 - ▶ Les intervalles suivants doivent être des éléments de $\sigma(\mathcal{A}_1)$:

$$(a, \infty) = (-\infty, a]^c,$$

$$(-\infty, b) = \bigcup_n (-\infty, b - 1/n],$$

$$[a, \infty) = (-\infty, a)^c.$$

- ▶ Alors
 - ▶ $(a, b] = (-\infty, b] \cap (a, \infty) \in \sigma(\mathcal{A}_1)$,
 - ▶ $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty) \in \sigma(\mathcal{A}_1)$,
 - ▶ $[a, b] = (-\infty, b] \cap [a, \infty) \in \sigma(\mathcal{A}_1)$,
 - ▶ $[a, b) = (-\infty, b) \cap [a, \infty) \in \sigma(\mathcal{A}_1)$.
- ▶ Alors $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{B} \equiv \sigma(\mathcal{A}_2)$.

Une semi-algèbre pour $\Omega = \{(r_1, r_2, \dots) : r_i \in \{0, 1\}\}$

- ▶ Ω est l'ensemble de suites infinies des 'piles ou faces'.
- ▶ Soit $A_{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv \{(r_1, r_2, \dots) \in \Omega : r_i = a_i, 1 \leq i \leq n\} \subseteq \Omega$.
- ▶ $A_{a_1 a_2 \dots a_n}$ est l'ensemble de suites infinies avec l'histoire initial $a_1 a_2 \dots a_n$.
- ▶ $\mathcal{J} \equiv \{A_{a_1 a_2 \dots a_n} : n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}\} \cup \{\emptyset, \Omega\}$.
- ▶ $A_{a_1 a_2 \dots a_n}$ comme un interval de $[0, 1)$.
- ▶ $A_{01011} \cap A_{0110000} = ?$, $A_{01} \cap A_{01101} = ?$, $A_{a_1 a_2 \dots a_n} \cap A_{b_1 b_2 \dots b_{n'}} = ?$
- ▶ $A_{010}^c = ?$, $A_{a_1 a_2 \dots a_n}^c = ?$
- ▶ \mathcal{J} est-elle une semi-algèbre?

Une proto-probabilité pour $\Omega = \{(r_1, r_2, \dots) : r_i \in \{0, 1\}\}$

Une 'proto-probabilité' $P: \mathcal{J} \cup \{\emptyset, \Omega\} \rightarrow [0, 1]$:

$$P(A_{a_1 a_2 \dots a_n}) = 1/2^n, \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1.$$

- ▶ Soit $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{J}$ tel que $D \equiv \cup_{i=1}^n D_i \in \mathcal{J}$.
- ▶ Vérification d'additivité fini de $P: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$.
- ▶ Il y a un $k \in \mathbb{N}$ tel que $D = A_{a_1 a_2 \dots a_k}$ et $P(D) = 2^{-k}$.
- ▶ $P(A_{a_1 a_2 \dots a_n}) = 2^{-n} = P(A_{a_1 a_2 \dots a_n 0}) + P(A_{a_1 a_2 \dots a_n 1}) = 2 \cdot 2^{-n-1}$
- ▶ Traversez l'arborescence de bas en haut.
- ▶ Pourquoi le cas d'additivité dénombrable n'est pas trivial?

Une semi-algèbre pour $\Omega_1 \times \Omega_2$

- ▶ Soit $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ deux espaces de probabilité.
- ▶ Nous voulons construire une semi-algèbre pour $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.
- ▶ Soit $\mathcal{J} \equiv \{A \times B : A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2\}$.
- ▶ $\emptyset, \Omega \in \mathcal{J}$?
- ▶ $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = ?$
- ▶ $(A \times B)^c = ?$

Une proto-probabilité pour $\mathcal{J} = \Omega_1 \times \Omega_2$

Une 'proto-probabilité' $P: \mathcal{J} \rightarrow [0, 1]$: $P(A \times B) \equiv P_1(A)P_2(B)$.

Vérification d'additivité *finie* (dénombrable plus tard) :

- ▶ Si $\cup_{i=1}^n (A_i \times B_i) \in \mathcal{J}$ alors il existe $\{\alpha_j: j \in J\} \subseteq \mathcal{F}_1$ et $\{\beta_k: k \in K\} \subseteq \mathcal{F}_2$ tels que

$$\cup_{i=1}^n (A_i \times B_i) = (\cup_{j \in J} \alpha_j) \times (\cup_{k \in K} \beta_k) \equiv A \times B.$$

- ▶ $P(A \times B) = P_1(A)P_2(B) = \left(\sum_{j \in J} P_1(\alpha_j) \right) \left(\sum_{k \in K} P_2(\beta_k) \right),$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P(A_i \times B_i) &= \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} P(\alpha_j \times \beta_k) \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} P_1(\alpha_j) P_2(\beta_k) \\ &= \left(\sum_{j \in J} P_1(\alpha_j) \right) \left(\sum_{k \in K} P_2(\beta_k) \right) = P(A \times B). \end{aligned}$$

Aperçu du Chapitre 3, partie I

- ▶ Définition d'une variable aléatoire : $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$.
- ▶ Quelques fonctions sur Ω qui sont des variables aléatoires :
 - ▶ les indicateurs $1_A(\omega)$, où $A \in \mathcal{F}$,
 - ▶ la somme de deux variables aléatoires, les multiples scalaires des variables aléatoires,
 - ▶ les limites des variables aléatoires: $(Z(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(\omega) \text{ pour } \omega \in \Omega)$.
- ▶ Indépendance
 - ▶ d'événements (du même espace de probabilité)
 - ▶ de collections d'événements
 - ▶ de variables aléatoires

Aperçu du Chapitre 3, partie II

Convergence monotone d'événements (exemples) :

- ▶ Pour $A_n \equiv [0, 1/n]$, $A_n \searrow \cap_n [0, 1/n] = \{0\}$.
- ▶ Pour $A_n \equiv [0, 1 - 1/n]$, $A_n \nearrow \cup_n [0, 1 - 1/n] = [0, 1)$.

Par convergence de probabilités (un théorème),

- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} P([0, 1/n]) = P(\{0\})$,
- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} P([0, 1 - 1/n]) = P([0, 1))$,

Aperçu du Chapitre 3, partie III

Pour les séquences réels,

- ▶ $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{m \geq n} x_m)$
- ▶ $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{m \geq n} x_m)$

Exemple : $x_n \equiv (-1)^n(1 + 1/n) = 2, -3/2, 4/3, -5/4, \dots$

Pour les suites d'événements, pas forcément monotone,

- ▶ $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$
- ▶ $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

Exemple : $H_n \equiv \{(r_1, r_2, \dots) \in \Omega : r_n = 1\}$, où $\Omega = \{(r_1, r_2, \dots) : r_i \in \{0, 1\}\}$. Trouvez $\liminf_n H_n$ (H_n presque toujours) et $\limsup_n H_n$ (H_n infiniment souvent).