ECN 7060, Cours 2

William McCausland

2022-09-14

Plan de route, Chapitre 2

- 2.1 Définition d'un espace de probabilité
- 2.2 Construction de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, possiblement indénombrable, à partir de
  - une semi-algèbre $\mathcal{J} \subseteq 2^{\Omega}$ et
  - une $P \colon \mathcal{J} \to [0,1]$ superadditive et dénombrablement monotone.
- 2.3 Théorème d'extension : pour montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu et que P est une probabilité sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$.
- 2.4 Application du théorème pour $\Omega = [0,1]$.
- 2.5 Variations du théorème (conditions alternatives)
- 2.6 Application du théorème pour d'autres Ω
  - suites de tirages à pile ou face $\Omega = \{(r_1, r_2, \ldots) : r_i \in \{0,1\}\}$
  - produits cartésien $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

Théorème d'extension I

Application : spécifier Ω, une semi-algèbre $\mathcal{J}$, une proto-probabilité $P\colon \mathcal{J} \to [0,1]$, puis obtenir $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Conditions sur Ω, $\mathcal{J}$ et $P\colon \mathcal{J} \to [0,1]$:

1. $\mathcal{J}$ est une semi-algèbre sur Ω, c'est à dire
   a. $\emptyset \in \mathcal{J}$, $\Omega \in \mathcal{J}$,
   b. $\mathcal{J}$ est stable pour les intersections finies,
   c. Si $A \in \mathcal{J}$, A^c est une réunion disjointe finie des éléments de $\mathcal{J}$.
2. $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$.
3. P est finiement superadditive : pour $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{J}$ disjoints tels que $\cup_{i=1}^k A_i \in \mathcal{J}$,

$$P\left(\cup_{i=1}^k A_i\right) \geq \sum_{i=1}^k P(A_i).$$

4. P est dénombrablement monotone : pour chaque suite $A_n \in \mathcal{J}$ telle que $A \equiv \cup_n A_n \in \mathcal{J}$, $P(A) \leq \sum_n P(A_n)$.

Théorème d'extension II

Si les conditions 1-4 tiennent, il y a une tribu $\mathcal{M}$ sur Ω et une probabilité P^* sur $\mathcal{M}$ telles que

1. $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{M}$,
2. $P^*(A) = P(A)$ pour chaque $A \in \mathcal{J}$.

Un résultat utile

Soit $\Omega \neq \emptyset$. Alors

- 2^{Ω} est une tribu.
- Pour chaque collection de tribus $\{\mathcal{F}_i \colon i \in I\}$ sur Ω, l'intersection $\cap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est une tribu.
- Pour n'importe quel ensemble $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ de parties de Ω il y a toujours une seule tribu (dénoté $\sigma(\mathcal{A})$) qui est la tribu la plus petite qui contient $\mathcal{A}$.

Deux tribus sur $\Omega = \mathbb{R}$ (Exercice 2.4.5)

- Un intervalle de $\mathbb{R}$ est n'importe $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ ou (a, b), où $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. (Si $a > b$, l'intervalle est vide.)
- Soit $\mathcal{A}_2$ l'ensemble de tous les intervalles de $\mathbb{R}$.
  - $\mathcal{A}_2$ est-elle une semi-algèbre?
  - $\mathcal{A}_2$ plus toutes les réunions dénombrables n'est pas une tribu. L'ensemble de Cantor (pages 16-17) est le complément d'une réunion dénombrable d'intervalles mais n'est pas une réunion dénombrable d'intervalles.
  - Soit $\mathcal{B} \equiv \sigma(\mathcal{A}_2)$, la tribu la plus petite qui contient $\mathcal{A}_2$.
  - La spécification directe de $P \colon \mathcal{A}_2 \to [0, 1]$ est ardue.
- Soit $\mathcal{A}_1 = \{(-\infty, x] \colon x \in \mathbb{R}\}$.
  - $\mathcal{A}_1$ est-elle une semi-algèbre?
  - Pourquoi $\mathcal{A}_1$ est-elle utile?
- Prochaine diapo : démonstration que $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{B}$.

Démonstration de $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{B} \equiv \sigma(\mathcal{A}_2)$

- $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ alors $\sigma(\mathcal{A}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_2)$.
- L'autre direction, $\sigma(\mathcal{A}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$:
  - Les intervalles suivants doivent être des éléments de $\sigma(\mathcal{A}_1)$:

$$(a, \infty) = (-\infty, a]^c,$$

$$(-\infty, b) = \cup_n (-\infty, b - 1/n],$$

$$[a, \infty) = (-\infty, a)^c.$$

  - Alors
    - $(a, b] = (-\infty, b] \cap (a, \infty) \in \sigma(\mathcal{A}_1)$,
    - $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty) \in \sigma(\mathcal{A}_1)$,
    - $[a, b] = (-\infty, b] \cap [a, \infty) \in \sigma(\mathcal{A}_1)$,
    - $[a, b) = (-\infty, b) \cap [a, \infty) \in \sigma(\mathcal{A}_1)$.
- Alors $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{B} \equiv \sigma(\mathcal{A}_2)$.

Une semi-algèbre pour $\Omega = \{(r_1, r_2, \ldots) : r_i \in \{0, 1\}\}$

- Ω est l'ensemble de suites infinies des tirages à pile ou face.
- Soit $A_{a_1 a_2 \ldots a_n} \equiv \{(r_1, r_2, \ldots) \in \Omega \colon r_i = a_i, 1 \leq i \leq n\} \subseteq \Omega$.
- $A_{a_1 a_2 \ldots a_n}$ est l'ensemble de suites infinies avec l'histoire initial $a_1 a_2 \ldots a_n$.
- $\mathcal{J} \equiv \{A_{a_1 a_2 \ldots a_n} \colon n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\}\} \cup \{\emptyset, \Omega\}$.
- $A_{a_1 a_2 \ldots a_n}$ comme un interval de $[0, 1)$.
- $A_{01011} \cap A_{0110000} =?$, $A_{01} \cap A_{01101} =?$, $A_{a_1 a_2 \ldots a_n} \cap A_{b_1 b_2 \ldots b_{n'}} =?$
- $A^c_{010} =?$, $A^c_{a_1 a_2 \ldots a_n} =?$
- $\mathcal{J}$ est-elle une semi-algèbre?

Une proto-probabilité pour $\Omega = \{(r_1, r_2, \ldots) : r_i \in \{0,1\}\}$

Une 'proto-probabilité' $P \colon \mathcal{J} \cup \{\emptyset, \Omega\} \to [0,1]$:

$$P(A_{a_1 a_2 \ldots a_n}) = 1/2^n, \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1.$$

- Soit $D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{J}$ tel que $D \equiv \cup_{i=1}^n D_i \in \mathcal{J}$.
- Vérification d'additivité fini de $P \colon \mathcal{J} \to \mathbb{R}$.
- Il y a un $k \in \mathbb{N}$ tel que $D = A_{a_1 a_2 \ldots a_k}$ et $P(D) = 2^{-k}$.
- $P(A_{a_1 a_2 \ldots a_n}) = 2^{-n} = P(A_{a_1 a_2 \ldots a_n 0}) + P(A_{a_1 a_2 \ldots a_n 1}) = 2 \cdot 2^{-n-1}$
- Traversez l'arborescence de bas en haut.
- Pourquoi le cas d'additivité dénombrable n'est pas trivial?

Une semi-algèbre pour $\Omega_1 \times \Omega_2$

- Soit $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ deux espaces de probabilité.
- Nous voulons construire une semi-algèbre pour $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.
- Soit $\mathcal{J} \equiv \{A \times B \colon A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2\}$.
- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{J}$?
- $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) =?$
- $(A \times B)^c =?$

Une proto-probabilité pour $\Omega_1 \times \Omega_2$

Une 'proto-probabilité' $P\colon \mathcal{J} \to [0,1]$: $P(A \times B) \equiv P_1(A)P_2(B)$.

Vérification d'additivité *finie* (dénombrable plus tard) :

- Si $\cup_{i=1}^n (A_i \times B_i) \in \mathcal{J}$ alors il existe $\{\alpha_i\colon j \in J\} \subseteq \mathcal{F}_1$ et $\{\beta_k\colon k \in K\} \subseteq \mathcal{F}_2$ tels que

$$\cup_{i=1}^n (A_i \times B_i) = (\cup_{j\in J}\alpha_i) \times (\cup_{k\in K}\beta_i) \equiv A \times B.$$

- $P(A \times B) = P_1(A)P_2(B) = \left(\sum_{j\in J} P_1(\alpha_j)\right)\left(\sum_{k\in K} P_2(\beta_j)\right)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n P(A_i \times B_i) &= \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} P(\alpha_j \times \beta_k) \\
&= \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} P_1(\alpha_j)P_2(\beta_k) \\
&= \left(\sum_{j\in J} P_1(\alpha_j)\right)\left(\sum_{k\in K} P_2(\beta_k)\right) = P(A \times B).
\end{aligned}$$

Aperçu du Chapitre 3, partie I

- Définition d'une variable aléatoire : $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$.
- Quelques fonctions sur Ω qui sont des variables aléatoires :
  - les indicateurs $1_A(\omega)$, où $A \in \mathcal{F}$,
  - la somme de deux variables aléatoires, les multiples scalaires des variables aléatoires,
  - les limites des variables aléatoires: ($Z(\omega) \equiv \lim_{n\to\infty} Z_n(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$)).
- Indépendence
  - d'événements (du même espace de probabilité)
  - de collections d'évènements
  - de variables aléatoires

Aperçu du Chapitre 3, partie II

Convergence monotone d'événements (exemples) :

- Pour $A_n \equiv [0, 1/n]$, $A_n \searrow \cap_n [0, 1/n] = \{0\}$.
- Pour $A_n \equiv [0, 1 - 1/n]$, $A_n \nearrow \cup_n [0, 1 - 1/n] = [0, 1)$.

Par convergence de probabilités (un théorème),

- $\lim_{n\to\infty} P([0, 1/n]) = P(\{0\})$,
- $\lim_{n\to\infty} P([0, 1 - 1/n]) = P([0, 1))$,

Aperçu du Chapitre 3, partie III

Pour les suites réelles,

- $\liminf_{n\to\infty} x_n \equiv \lim_{n\to\infty}(\inf_{m\geq n} x_m)$
- $\limsup_{n\to\infty} x_n \equiv \lim_{n\to\infty}(\sup_{m\geq n} x_m)$

Exemple : $x_n \equiv (-1)^n(1+1/n) = 2, -3/2, 4/3, -5/4, \ldots$

Pour les suites d'événements, pas forcément monotone,

- $\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k$
- $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$

Exemple : $H_n \equiv \{(r_1, r_2, \ldots) \in \Omega \colon r_n = 1\}$, où $\Omega = \{(r_1, r_2, \ldots) \colon r_i \in \{0, 1\}\}$. Trouvez $\liminf_n H_n$ (H_n presque toujours) et $\limsup_n H_n$ (H_n infiniment souvent).