ECN 7060, cours 11

William McCausland

2021-11-24

Hypothèses sur un paramètre $\theta \in \Theta$

- Deux hypothèses sur θ :
  - hypothèse nulle H_0, $\theta \in \Theta_0$
  - hypothèse alternative H_1, $\theta \in \Theta_0^c$
- Notes :
  - Les hypothèses viennent d'une question scientifique d'intérêt.
  - Il n'y a rien ici de classique ou de bayésien.
  - La spécification de Θ_0 devrait précèder la recherche d'un test et l'évaluation d'un test.
  - Il y a une asymmétrie qui n'est pas explicite ici.
  - L'asymétrie est une question d'erreur : on favorise le control d'un type d'erreur.

Tests

- Deux décisions (même notation pour les actions)
  - a_0, ne pas rejeter H_0
  - a_1, rejeter H_0
- Deux régions de l'espace échantillonal :
  - région critique (ou de rejet) $R \subseteq \mathcal{X}$
  - région de non-rejet R^c
- Notes :
  - Une règle de décision est un $\delta\colon \mathcal{X} \to \{a_0, a_1\}$
  - $R = \{x\colon \delta(x) = a_1\}$, $R^c = \{x\colon \delta(x) = a_0\}$.
  - réduction de dimension, comme dans le cas d'estimation ponctuelle : il y a souvent une statistique $W(X)$ scalaire tel que R ou R^c prend la forme $\{x\colon W(x) \in [a, b]\}$, des fois avec $a = -\infty$ ou $b = \infty$.
  - attention : quand $W(X)$ est un estimateur de θ, il est facile de confondre une hypothèse avec une région (R ou R^c).

Optimalité par fonction de perte

- Une fonction de perte assez générale :

$$L(\theta, a_0) = \begin{cases} 0 & \theta \in \Theta_0 \\ c_{II} & \theta \in \Theta_0^c \end{cases}$$

$$L(\theta, a_1) = \begin{cases} c_I & \theta \in \Theta_0 \\ 0 & \theta \in \Theta_0^c \end{cases}$$

- Notes :
  - c_I est le coût d'une erreur du type I, c_{II} le coût d'une erreur du type II
  - Avec cette généralité, on peut briser la symétrie des deux hypothèses : choisir $c_I \neq c_{II}$.

Les fonctions de risque et de puissance

- Le risque $R(\theta, \delta) = E_\theta[L(\theta, \delta(X))]$ est

$$R(\theta, \delta) = \begin{cases} 0 \cdot P_\theta(\delta(X) = a_0) + c_I \cdot P_\theta(\delta(X) = a_1), & \theta \in \Theta_0, \\ c_{II} \cdot P_\theta(\delta(X) = a_0) + 0 \cdot P_\theta(\delta(X) = a_1), & \theta \in \Theta_0^c. \end{cases}$$

- Cela motive la définition de la fonction de puissance :

$$\beta(\theta) \equiv P_\theta(X \in R) = P_\theta(\delta(X) = a_1)$$

- On peut écrire tout court

$$R(\theta, \delta) = \begin{cases} c_I \beta(\theta), & \theta \in \Theta_0, \\ c_{II}(1 - \beta(\theta)), & \theta \in \Theta_0^c \end{cases}$$

- Rappel : c'est une exercise *ex ante*.

Risque de Bayes

- Rappel : $r(\pi, \delta) = \int R(\theta, \delta)\pi(\theta)\, d\theta = E[E[L(\theta, \delta(X))|\theta]] = E[L(\theta, \delta(X))] = E[E[L(\theta, \delta(X))|X]]$.
- Pour un échantillon x observé, la perte espérée *a posteriori* est

$$\begin{aligned} & E[L(\theta, \delta(X))|x] \\ &= \begin{cases} 0 \cdot P[\theta \in \Theta_0|x] + c_{II} \cdot P[\theta \in \Theta_0^c|x], & \delta(x) = a_0 \\ c_I \cdot P[\theta \in \Theta_0|x] + 0 \cdot P[\theta \in \Theta_0^c|x], & \delta(x) = a_1 \end{cases} \end{aligned}$$

- La solution $\delta(x)$ qui minimise la perte *a posteriori* est

$$\delta(x) = \begin{cases} a_0, & \frac{c_I}{c_{II}} \frac{P[\theta \in \Theta_0|x]}{P[\theta \in \Theta_0^c|x]} \geq 1, \\ a_1, & \text{autrement.} \end{cases}$$

- Notes :
  - C'est une exercise *ex post*.
  - La distinction entre H_0 et H_1 est seulement en termes de c_{II}/c_I.

Lemme Neyman Pearson

Définition 8.3.5

Pour $\alpha \in [0, 1]$, un test avec fonction de puissance $\beta(\theta)$ a un niveau de α si $\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta) \leq \alpha$.

Définition 8.3.11

Pour $\alpha \in [0, 1]$, un test de niveau α avec fonction de puissance $\beta(\theta)$ est uniforment plus puissant si pour chaque $\theta \in \Theta_0^c$ et pour chaque fonction de puissance $\beta'(\theta)$ d'un test de niveau α, $\beta(\theta) \geq \beta'(\theta)$.

Lemme Neyman Pearson

- Supposons que la densité des données est $f(x|\theta_0)$ ou $f(x|\theta_1)$, selon la valeur de $\theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$.
- On considère des tests de l'hypothèse $H_0\colon \theta = \theta_0$ contre l'hypothèse $H_1\colon \theta = \theta_1$.
- À une condition technique près, un test de niveau α est uniformement plus puissant ssi le test prend la forme $R = \{x \in \mathcal{X}\colon f(x|\theta_1) > kf(x|\theta_0)\}$ et $P_{\theta_0}[R] = \alpha$.

Intuition Neyman Pearson I

- On divise $\mathcal{X}$ en deux : R où $\delta(x) = a_1$ et R^c où $\delta(x) = a_0$.
- On choisit R pour maximiser $P[R|\theta_1]$ sous la contrainte $P[R|\theta_0] \leq c$.
- Une fonction de Lagrange pour ce problème :

$$P[R|\theta_1] - \lambda(P[R|\theta_0] - c).$$

- Pour $x_2 \in \mathcal{X}$ à la frontière entre R optimal et R^c et un voisinage infinitessimal dR_2 autour de x_2,

$$P[R + dR_2|\theta_1] - P[R|\theta_1] - \lambda(P[R + dR_2|\theta_0] - P[R|\theta_0]) = 0.$$

ou

$$p(x_2|\theta_1) - \lambda p(x_2|\theta_0) = 0.$$

Intuition Neyman Pearson II

- De la diapo précédente :

$$\frac{p(x_2|\theta_1)}{p(x_2|\theta_0)} = \lambda.$$

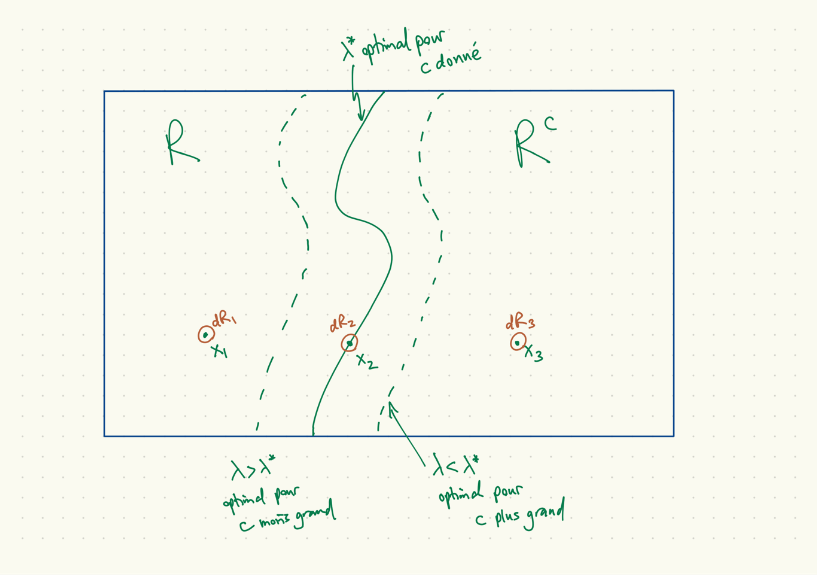
- Pour $x_1 \in \mathcal{X}$ à l'intérieure de R,

$$\frac{p(x_1|\theta_1)}{p(x_1|\theta_0)} > \lambda.$$

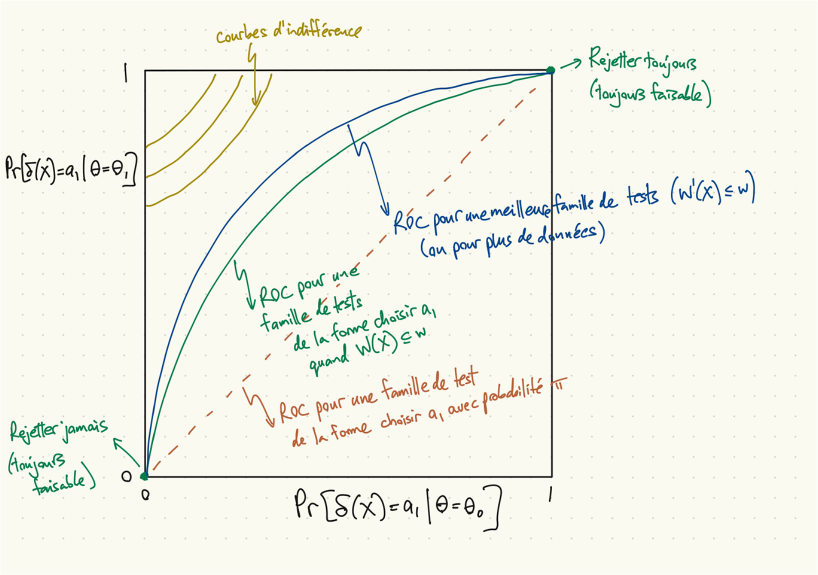
- Pour $x_3 \in \mathcal{X}$ à l'intérieure de R^c,

$$\frac{p(x_3|\theta_1)}{p(x_3|\theta_0)} < \lambda.$$

Illustration pour l'intuition Neyman Pearson



ROC



Courbes d'indifférence
1
$Pr[\delta(X)=a_1 | \theta=\theta_1]$
Rejetter toujours
(toujours faisable)
ROC pour une meilleure famille de tests $(W'(X) \leq w)$
(ou pour plus de données)
ROC pour une famille de tests de la forme choisir a_1 quand $W(X) \leq w$
ROC pour une famille de test de la forme choisir a_1 avec probabilité π
Rejetter jamais
(toujours faisable)
0
0
1
$Pr[\delta(X)=a_1 | \theta=\theta_0]$

Exemple récurrent Bernoulli

- Rappel :
  1. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{iid}\,\mathrm{Bn}(\theta)$, $\theta \in [0,1]$.
  2. $L(\theta|x) = \theta^r(1-\theta)^{(n-r)}$, où r est le nombre de uns.
  3. $\hat{\theta}_{\mathrm{EMV}} = \hat{\theta} = r/n$.
- Considérons les hypothèses $H_0 : \theta \geq 1/2$ et $H_1 : \theta < 1/2$
  - $\Theta_0 = [1/2, 1]$, $\Theta = [0,1]$, $\Theta_0^c = [0, 1/2)$
- Calculer le rapport des vraisemblances

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} L(\theta|x) = \begin{cases} L(\hat{\theta}|x) & \hat{\theta} \geq 1/2 \\ L(\frac{1}{2}|x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n & \hat{\theta} < 1/2 \end{cases}$$

$$\sup_{\theta\in\Theta} L(\theta|x) = L(\hat{\theta}|x)$$

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1, & r \geq n/2, \\ \frac{(n/2)^n}{r^r(n-r)^{n-r}}, & r < n/2. \end{cases}$$

- Une fonction de la statistique suffisante. En général, on peut utiliser $f(t|\theta)$ directement, obtenir le même résultat.

Les valeures de $\lambda(x)$ pour $n = 12$

r	$\lambda(x)$	$P_\theta(R \leq r)$
0	0.000244	$(1-\theta)^n$
1	0.007629	$(1-\theta)^n + n\theta(1-\theta)^{n-1}$
2	0.054420	$(1-\theta)^n + n\theta(1-\theta)^{n-1} + \binom{n}{2}\theta^2(1-\theta)^{n-2}$
3	0.208098	$\cdots$
4	0.506822	
5	0.845821	
6	1	
$\cdots$	$\cdots$	
12	1	1

La forme d'un LRT

- La forme en général :

$$\left\{x \in \mathcal{X} \colon \lambda(x) \equiv \frac{\sup_{\theta\in\Theta_0} L(\theta|x)}{\sup_{\theta\in\Theta} L(\theta|x)} \leq c\right\}$$

- Notes :
  - attrait intuitive
  - réduction de dimension
- $c \in [0, 1]$ à spécifier
- Ici, la forme d'un LRT est

$$\{x \in \mathcal{X} \colon \sum_i x_i \leq r\}, \quad r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 12$$

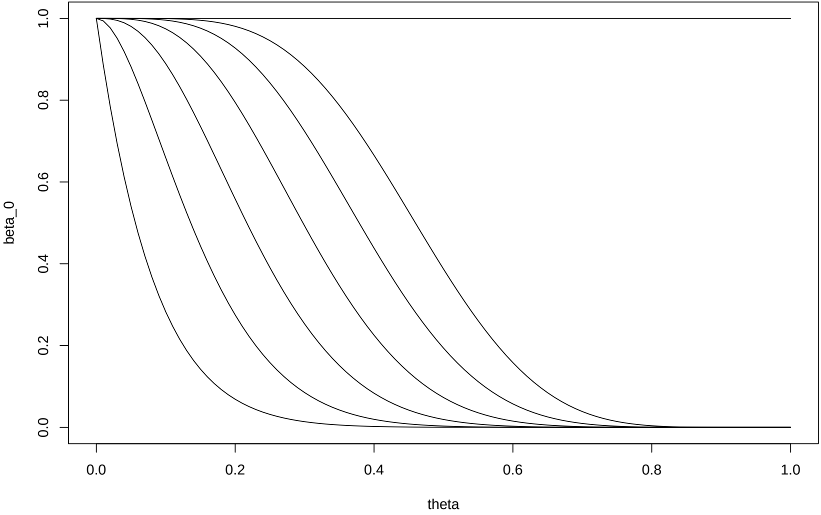
Quelques fonctions de puissance $\beta_r(\theta)$

- Soit $\beta_r(\theta)$ la fonction de puissance pour la région critique $\{x\colon \sum_i x_i \leq r\}$

```
theta = seq(0, 1, by=0.01); n=12
beta_0 = pbinom(0, n, theta) # R = {r <= 0}
beta_1 = pbinom(1, n, theta) # R = {r <= 1}
beta_2 = pbinom(2, n, theta) # R = {r <= 2}
beta_3 = pbinom(3, n, theta)
beta_4 = pbinom(4, n, theta)
beta_5 = pbinom(5, n, theta)
beta_12 = pbinom(12, n, theta)
```

Graphique des fonctions de puissance

```
plot(theta, beta_0, type='l'); lines(theta, beta_1)
lines(theta, beta_2); lines(theta, beta_3)
lines(theta, beta_4); lines(theta, beta_5); lines(theta, be
```



Exemple, même modèle, hypothèse ponctuelle

- Considérons les hypothèses $H_0 : \theta = 1/2$ et $H_1 : \theta \neq 1/2$
- Ici, la LRT $\lambda(x)$ est

$$\lambda(x) = \frac{(n/2)^n}{r^r(n-r)^{n-r}}.$$

Les valeures de $\lambda(x)$ pour $n = 12$

r	$\lambda(x)$
0	0.000244
1	0.007629
2	0.054420
3	0.208098
4	0.506822
5	0.845821
6	1.000000
7	0.845821
8	0.506822
9	0.208098
10	0.054420
11	0.007629
12	0.000244

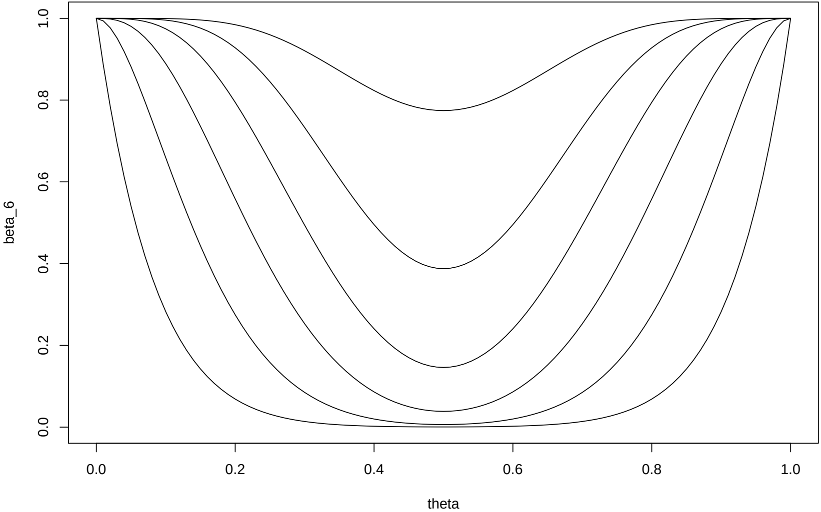
Quelques fonctions de puissance $\beta_r(\theta)$

- Soit $\beta_c(\theta)$ la fonction de puissance pour la région critique $\{x\colon |\sum_i x_i - n/2| \geq c\}$

```
theta = seq(0, 1, by=0.01); n=12
# R = {0,12}
beta_6 = pbinom(0, n, theta) + pbinom(0, n, 1-theta)
# R = {0,1,11,12}
beta_5 = pbinom(1, n, theta) + pbinom(1, n, 1-theta)
beta_4 = pbinom(2, n, theta) + pbinom(2, n, 1-theta)
beta_3 = pbinom(3, n, theta) + pbinom(3, n, 1-theta)
beta_2 = pbinom(4, n, theta) + pbinom(4, n, 1-theta)
# R = {0,1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,12}
beta_1 = pbinom(5, n, theta) + pbinom(5, n, 1-theta)
```

Graphique des fonctions de puissance

```
plot(theta, beta_6, type='l'); lines(theta, beta_5)
lines(theta, beta_4); lines(theta, beta_3)
lines(theta, beta_2); lines(theta, beta_1)
```



La probabilité *a posteriori* $P(\theta \geq 1/2|x)$, $r = 4$

- Soit $n = 12$, $\theta \sim \mathrm{Be}(\alpha, \beta)$, où $\alpha = 1$, $\beta = 1$.
- $\theta|x \sim \mathrm{Be}(\alpha + r, \beta + n - r)$
- Si on observe (mettons) $r = 4$, $\theta|x \sim \mathrm{Be}(5, 9)$
- $P(\theta \geq 1/2|r(x) = 4) = 1 - F_{\mathrm{Be}(5,9)}(1/2) = 0.1334229$.
- On choisit a_0 ssi

$$\frac{c_I}{c_{II}} \cdot \frac{1 - F_{\mathrm{Be}(5,9)}(1/2)}{F_{\mathrm{Be}(5,9)}(1/2)} \geq 1.$$

La probabilité *a posteriori* $P(\theta \geq 1/2|x)$, plusieurs r

- Soit $n = 12$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\Omega_0 = [1/2, 1]$
- La probabilité *a posterior* dépend du r observé :

r	$P[\theta \in \Omega_0 \vert x]$
0	0.0001220703
1	0.0017089844
2	0.0112304688
3	0.0461425781
4	0.1334228516
5	0.2905273437
6	0.5000000000
7	0.7094726563
8	0.8665771484
9	0.9538574219
10	0.9887695312
11	0.9982910156
12	0.9998779297

Test d'une hypothèse ponctuelle, une approche bayésienne

Un modèle composé, où le modèle M, le paramètre θ et les données sont aléatoires :

$$\begin{aligned} f(M, \theta, x) = {} & \Pr[M = H_0] 1_{\{H_0\}}(M) \delta_{1/2}(\theta)(1/2)^n \\ & + \Pr[M = H_1] 1_{\{H_1\}}(M) f_{\mathrm{Be}}(\theta; \alpha, \beta) \theta^r (1-\theta)^{n-r}. \end{aligned}$$

Après l'intégration par rapport à θ,

$$f(M, x) = \Pr[M = H_0] 1_{\{H_0\}}(M) f_0(x) + \Pr[M = H_1] 1_{\{H_1\}}(M) f_1(x),$$

où

$$f_0(x) = (1/2)^n, \quad f_1(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+r)\Gamma(\beta+n-r)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)}.$$

(cont.)

Les probabilités posterieures :

$$\Pr[M = H_0|x] = \frac{\Pr[M = H_0]f_0(x)}{\Pr[M = H_0]f_0(x) + \Pr[M = H_1]f_1(x)}$$

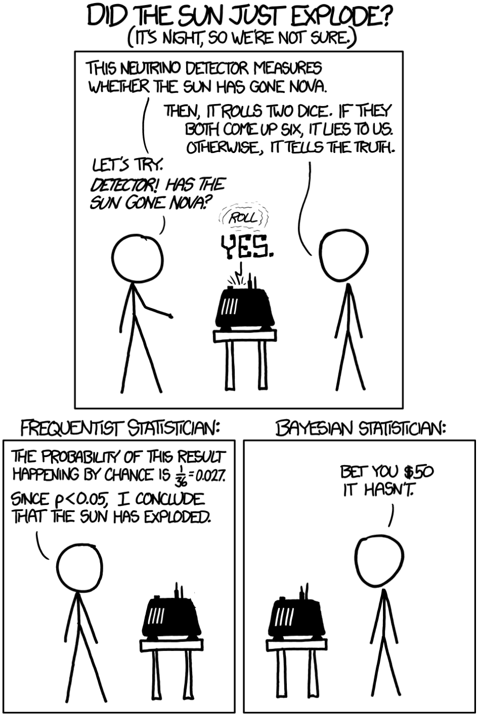
$$\Pr[M = H_1|x] = \frac{\Pr[M = H_1]f_1(x)}{\Pr[M = H_0]f_0(x) + \Pr[M = H_1]f_1(x)}$$

Le rapport de chances (rapport des cotes) postérieur :

$$\frac{\Pr[M = H_0|x]}{\Pr[M = H_1|x]} = \frac{\Pr[M = H_0]}{\Pr[M = H_1]}\frac{f_0(x)}{f_1(x)}$$

La décision optimale :

$$\delta(x) = \begin{cases} a_0 & \frac{c_I}{c_{II}}\frac{\Pr[M=H_0]}{\Pr[M=H_1]}\frac{f_0(x)}{f_1(x)} \geq 1, \\ a_1 & \text{autrement.} \end{cases}$$


DID THE SUN JUST EXPLODE?
(IT'S NIGHT, SO WE'RE NOT SURE.)
THIS NEUTRINO DETECTOR MEASURES WHETHER THE SUN HAS GONE NOVA.
THEN, IT ROLLS TWO DICE. IF THEY BOTH COME UP SIX, IT LIES TO US. OTHERWISE, IT TELLS THE TRUTH.
LET'S TRY.
DETECTOR! HAS THE SUN GONE NOVA?
ROLL
YES.
FREQUENTIST STATISTICIAN:
THE PROBABILITY OF THIS RESULT HAPPENING BY CHANCE IS $\frac{1}{36}=0.027$.
SINCE $p<0.05$, I CONCLUDE THAT THE SUN HAS EXPLODED.
BAYESIAN STATISTICIAN:
BET YOU $50 IT HASN'T.