ECN 7060, cours 11

William McCausland

2022-11-23

Hypothèses sur un paramètre $\theta \in \Theta$

- Deux hypothèses sur θ :
  - hypothèse nulle H_0, $\theta \in \Theta_0$
  - hypothèse alternative H_1, $\theta \in \Theta_0^c$
- Notes :
  - Les hypothèses viennent d'une question scientifique d'intérêt.
  - Il n'y a rien ici de classique ou de bayésien.
  - La spécification de Θ_0 devrait précèder la recherche d'un test et l'évaluation d'un test.
  - Il n'y a pas d'asymétrie explicite ici entre H_0 et H_1.
  - L'asymétrie est une question d'erreur : on favorise le control d'un type d'erreur.

Tests

- Deux décisions (même notation pour les actions que la semaine passée)
  - a_0, ne pas rejeter H_0
  - a_1, rejeter H_0
- Deux régions de l'espace échantillonal :
  - région critique (ou de rejet) $R \subseteq \mathcal{X}$
  - région de non-rejet R^c
- Notes :
  - Une règle de décision est un $\delta\colon \mathcal{X} \to \{a_0, a_1\}$
  - $R = \{x\colon \delta(x) = a_1\}$, $R^c = \{x\colon \delta(x) = a_0\}$.
  - réduction de dimension, comme dans le cas d'estimation ponctuelle : il y a souvent une statistique $W(X)$ scalaire tel que R ou R^c prend la forme $\{x\colon W(x) \in [a, b]\}$, des fois avec $a = -\infty$ ou $b = \infty$.
  - attention : quand $W(X)$ est un estimateur de θ, il est facile de confondre une hypothèse avec R ou R^c.

Optimalité par fonction de perte

- Une fonction de perte assez générale :

$$L(\theta, a_0) = \begin{cases} 0 & \theta \in \Theta_0 \\ c_{II} & \theta \in \Theta_0^c \end{cases}$$

$$L(\theta, a_1) = \begin{cases} c_I & \theta \in \Theta_0 \\ 0 & \theta \in \Theta_0^c \end{cases}$$

- Notes :
  - c_I est le coût d'une erreur du type I, c_{II} le coût d'une erreur du type II
  - Avec cette généralité, on peut briser la symétrie entre les deux hypothèses : choisir $c_I \neq c_{II}$.
  - Si la mesure de coût est l'espérance de l'erreur, la spécification du coût se réduit à la choix de c_I / c_{II}.

Les fonctions de risque et de puissance

- Le risque $R(\theta, \delta) = E_\theta[L(\theta, \delta(X))]$ est

$$R(\theta, \delta) = \begin{cases} 0 \cdot P_\theta(\delta(X) = a_0) + c_I \cdot P_\theta(\delta(X) = a_1), & \theta \in \Theta_0, \\ c_{II} \cdot P_\theta(\delta(X) = a_0) + 0 \cdot P_\theta(\delta(X) = a_1), & \theta \in \Theta_0^c. \end{cases}$$

- Cela motive la définition de la fonction de puissance :

$$\beta(\theta) \equiv P_\theta(X \in R) = P_\theta(\delta(X) = a_1)$$

- On peut écrire tout court

$$R(\theta, \delta) = \begin{cases} c_I \beta(\theta), & \theta \in \Theta_0, \\ c_{II}(1 - \beta(\theta)), & \theta \in \Theta_0^c \end{cases}$$

- Rappel : ce calcul est une exercice *ex ante*.

Risque de Bayes

- Rappel : $r(\pi, \delta) = \int R(\theta, \delta)\pi(\theta)\, d\theta = E[E[L(\theta, \delta(X))|\theta]] = E[L(\theta, \delta(X))] = E[E[L(\theta, \delta(X))|X]]$.
- Pour un échantillon x observé, la perte espérée *a posteriori* est

$$
\begin{aligned}
&E[L(\theta, \delta(X))|x] \\
&= \begin{cases} 0 \cdot P[\theta \in \Theta_0|x] + c_{II} \cdot P[\theta \in \Theta_0^c|x], & \delta(x) = a_0 \\ c_I \cdot P[\theta \in \Theta_0|x] + 0 \cdot P[\theta \in \Theta_0^c|x], & \delta(x) = a_1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

- La solution $\delta(x)$ qui minimise la perte *a posteriori* est

$$
\delta(x) = \begin{cases} a_0, & \frac{c_I}{c_{II}} \frac{P[\theta \in \Theta_0|x]}{P[\theta \in \Theta_0^c|x]} \geq 1, \\ a_1, & \text{autrement.} \end{cases}
$$

- Notes :
  - Ce calcul est une exercice *ex post*.
  - L'asymétrie entre H_0 et H_1 est seulement en termes de c_{II}/c_I.

Lemme Neyman Pearson

Définition 8.3.5

Pour $\alpha \in [0,1]$, un test avec fonction de puissance $\beta(\theta)$ a un niveau de α si $\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta) \leq \alpha$.

Définition 8.3.11

Pour $\alpha \in [0,1]$, un test de niveau α avec fonction de puissance $\beta(\theta)$ est uniforment plus puissant si pour chaque $\theta \in \Theta_0^c$ et pour chaque fonction de puissance $\beta'(\theta)$ d'un test de niveau α, $\beta(\theta) \geq \beta'(\theta)$.

Lemme Neyman Pearson

- Supposons que la densité des données est $f(x|\theta_0)$ ou $f(x|\theta_1)$, selon la valeur de $\theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$.
- On considère des tests de l'hypothèse $H_0\colon \theta = \theta_0$ contre l'hypothèse $H_1\colon \theta = \theta_1$.
- À une condition technique près, un test de niveau α est uniformement plus puissant ssi le test prend la forme $R = \{x \in \mathcal{X} \colon f(x|\theta_1) > kf(x|\theta_0)\}$ et $P_{\theta_0}[R] = \alpha$.

Intuition Neyman Pearson I

- On divise $\mathcal{X}$ en deux : R où $\delta(x) = a_1$ et R^c où $\delta(x) = a_0$.
- On choisit R pour maximiser $P[R|\theta_1]$ sous la contrainte $P[R|\theta_0] \leq c$.
- Une fonction de Lagrange pour ce problème :

$$P[R|\theta_1] - \lambda(P[R|\theta_0] - c).$$

- Si (λ^*, R^*) est la solution, λ^* est le prix d'ombre de la puissance.
- Pour $x_2 \in \mathcal{X}$ à la frontière entre R optimal et R^c et un voisinage infinitessimal dR_2 autour de x_2,

$$P[R + dR_2|\theta_1] - P[R|\theta_1] - \lambda(P[R + dR_2|\theta_0] - P[R|\theta_0]) = 0.$$

ou

$$p(x_2|\theta_1) - \lambda p(x_2|\theta_0) = 0.$$

Intuition Neyman Pearson II

- De la diapo précédente :

$$\frac{p(x_2|\theta_1)}{p(x_2|\theta_0)} = \lambda.$$

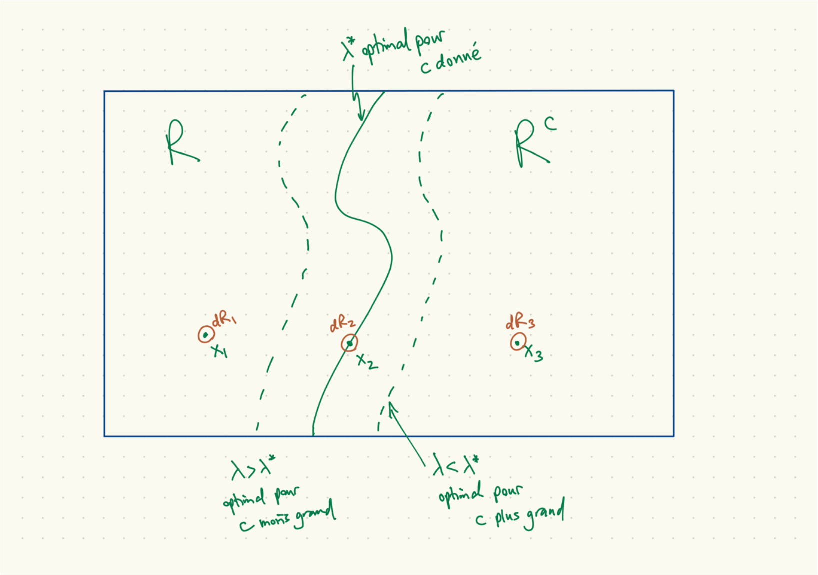
- Pour $x_1 \in \mathcal{X}$ à l'intérieure de R,

$$\frac{p(x_1|\theta_1)}{p(x_1|\theta_0)} > \lambda.$$

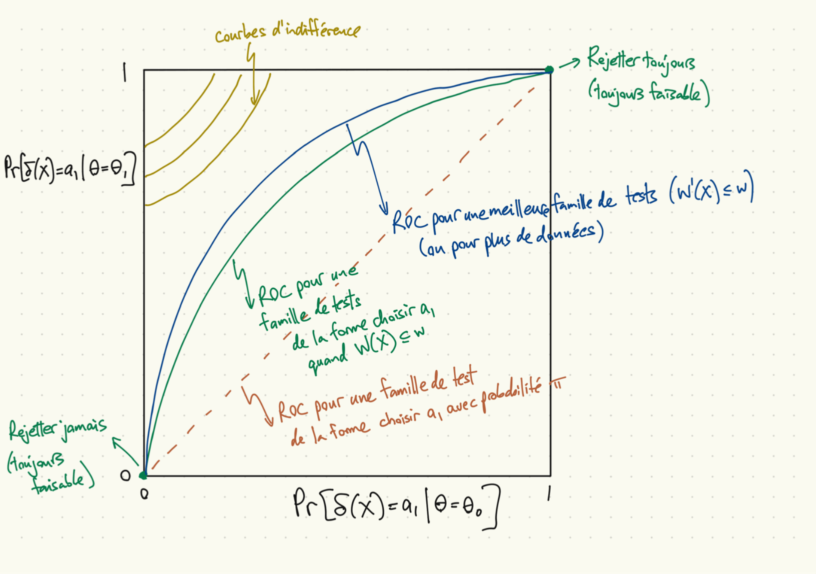
- Pour $x_3 \in \mathcal{X}$ à l'intérieure de R^c,

$$\frac{p(x_3|\theta_1)}{p(x_3|\theta_0)} < \lambda.$$

Illustration pour l'intuition Neyman Pearson



ROC



Courbes d'indifférence
Rejetter toujours (toujours faisable)
1
$Pr[\delta(X)=a_1 | \theta=\theta_1]$
ROC pour une meilleure famille de tests $(W'(X) \leq w)$
(ou pour plus de données)
ROC pour une famille de tests de la forme choisir a_1 quand $W(X) \leq w$
ROC pour une famille de test de la forme choisir a_1 avec probabilité π
Rejetter jamais (toujours faisable)
0
0
1
$Pr[\delta(X)=a_1 | \theta=\theta_0]$

Test du rapport de vraisemblance (LRT, likelihood ratio test)

- La région de rejet d'un test LRT en général, avec $c \in [0, 1]$ à spécifier:

$$R = \left\{ x \in \mathcal{X} : \lambda(x) \equiv \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta|x)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta|x)} \leq c \right\}$$

- Notes :
  - attrait intuitive dans la lumière du lemme Neymann-Pearson
  - réduction de dimension (on spécifie seulement le scalaire c)
  - on utilise souvent $-2 \log \lambda$ comme la statistique test à cause de sa loi khi-carré asymptotique.

Exemple récurrent Bernoulli

- Rappel :
  - $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{iid}\,\mathrm{Bn}(\theta)$, $\theta \in [0, 1]$.
  - $L(\theta|x) = \theta^r (1-\theta)^{(n-r)}$, où r est le nombre de uns.
  - $\hat{\theta}_{\mathrm{EMV}} = \hat{\theta} = r/n$.
  - r est une statistique exhaustive minimale.
- Considérons les hypothèses $H_0 : \theta \geq 1/2$ et $H_1 : \theta < 1/2$
  - Alors $\Theta_0 = [1/2, 1]$,
  - $\Theta = [0, 1]$
  - $\Theta_0^c = [0, 1/2)$

Exemple Bernoulli (cont.)

- Calculer le rapport des vraisemblances

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta|x) = \begin{cases} L(\hat{\theta}|x) = \left(\frac{r}{n}\right)^r \left(\frac{n-r}{n}\right)^{n-r} & \hat{\theta} \geq 1/2 \\ L(\frac{1}{2}|x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n & \hat{\theta} < 1/2 \end{cases}$$

$$\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta|x) = L(\hat{\theta}|x) = \left(\frac{r}{n}\right)^r \left(\frac{n-r}{n}\right)^{n-r}$$

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1, & r \geq n/2, \\ \frac{(n/2)^n}{r^r(n-r)^{n-r}}, & r < n/2. \end{cases}$$

- $\lambda(x)$ est une fonction de la statistique exhaustive r.
- En général, on peut utiliser $f(t|\theta)$ directement, obtenir le même résultat.
- Les régions de rejet des tests LRT sont

$$R_r = \{x \in \mathcal{X} : \sum_i x_i \leq r\}, \quad r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 12.$$

Les valeures de $\lambda(x)$ pour $n = 12$

r	$\lambda(x)$	$\beta_r(\theta) = P_\theta(R \leq r)$
0	0.000244	$(1-\theta)^n$
1	0.007629	$(1-\theta)^n + n\theta(1-\theta)^{n-1}$
2	0.054420	$(1-\theta)^n + n\theta(1-\theta)^{n-1} + \binom{n}{2}\theta^2(1-\theta)^{n-2}$
3	0.208098	$\cdots$
4	0.506822	
5	0.845821	
6	1	
$\cdots$	$\cdots$	
12	1	1

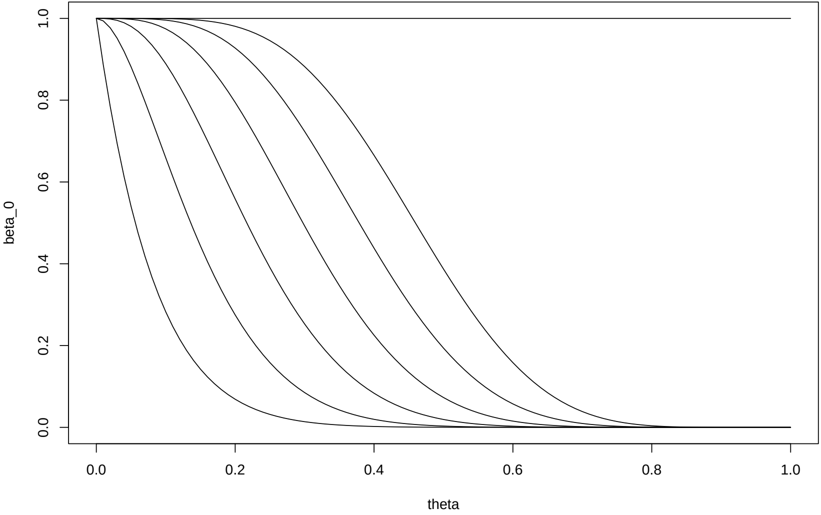
Quelques fonctions de puissance $\beta_r(\theta)$

- Soit $\beta_r(\theta)$ la fonction de puissance pour la région critique $\{x\colon \sum_i x_i \leq r\}$

```
theta = seq(0, 1, by=0.01); n=12
beta_0 = pbinom(0, n, theta) # R = {r <= 0}
beta_1 = pbinom(1, n, theta) # R = {r <= 1}
beta_2 = pbinom(2, n, theta) # R = {r <= 2}
beta_3 = pbinom(3, n, theta)
beta_4 = pbinom(4, n, theta)
beta_5 = pbinom(5, n, theta)
beta_12 = pbinom(12, n, theta)
```

Graphique des fonctions de puissance

```
plot(theta, beta_0, type='l'); lines(theta, beta_1)
lines(theta, beta_2); lines(theta, beta_3)
lines(theta, beta_4); lines(theta, beta_5); lines(theta, be
```



Exemple, même modèle, hypothèse ponctuelle

- Considérons les hypothèses $H_0 : \theta = 1/2$ et $H_1 : \theta \neq 1/2$
- Ici, le rapport de vraisemblance est

$$\lambda(x) = \frac{L(\frac{1}{2})}{L(\hat{\theta})} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{r}{n}\right)^r \left(\frac{n-r}{n}\right)^{n-r}} = \frac{(n/2)^n}{r^r(n-r)^{n-r}}.$$

Les valeures de $\lambda(x)$ pour $n = 12$

r	$\lambda(x)$
0	0.000244
1	0.007629
2	0.054420
3	0.208098
4	0.506822
5	0.845821
6	1.000000
7	0.845821
8	0.506822
9	0.208098
10	0.054420
11	0.007629
12	0.000244

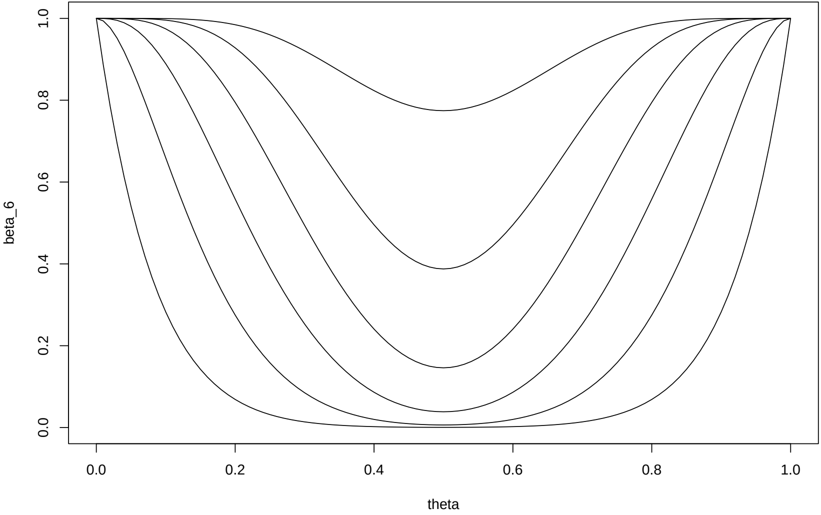
Quelques fonctions de puissance $\beta_r(\theta)$

- Soit $\beta_c(\theta)$ la fonction de puissance pour la région critique $\{x\colon |\sum_i x_i - n/2| \geq c\}$

```
theta = seq(0, 1, by=0.01); n=12
# R = {0,12}
beta_6 = pbinom(0, n, theta) + pbinom(0, n, 1-theta)
# R = {0,1,11,12}
beta_5 = pbinom(1, n, theta) + pbinom(1, n, 1-theta)
# Autres régions de rejet R
beta_4 = pbinom(2, n, theta) + pbinom(2, n, 1-theta)
beta_3 = pbinom(3, n, theta) + pbinom(3, n, 1-theta)
beta_2 = pbinom(4, n, theta) + pbinom(4, n, 1-theta)
# R = {0,1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,12}
beta_1 = pbinom(5, n, theta) + pbinom(5, n, 1-theta)
```

Graphique des fonctions de puissance

```
plot(theta, beta_6, type='l'); lines(theta, beta_5)
lines(theta, beta_4); lines(theta, beta_3)
lines(theta, beta_2); lines(theta, beta_1)
```



Un test bayésien de $H_0 : \theta \geq \frac{1}{2}$ contre $H_1 : \theta < \frac{1}{2}$.

- Soit $n = 12$, comme avant.
- Soit $\theta \sim \mathrm{Be}(\alpha, \beta)$, où $\alpha = 1$, $\beta = 1$ (loi uniforme).
- La loi *a posteriori* est $\theta | x \sim \mathrm{Be}(\alpha + r, \beta + n - r)$.
- Mettons qu'on observe $r = 4$.
- La loi *a posteriori* est $\theta | x \sim \mathrm{Be}(5, 9)$ (prochaine diapo).
- Aparté : considérons la possibilité d'arrêter ici.
- La probabilité *a posteriori* de H_0 est

$$P(\theta \geq 1/2 | r(x) = 4) = 1 - F_{\mathrm{Be}(5,9)}(1/2) = 0.1334229.$$

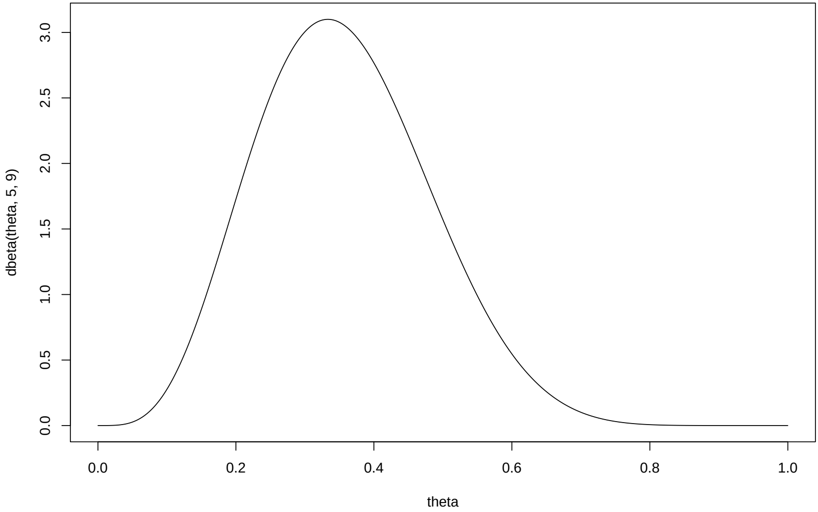
- On choisit a_0 ssi

$$\frac{c_I}{c_{II}} \cdot \frac{1 - F_{\mathrm{Be}(5,9)}(1/2)}{F_{\mathrm{Be}(5,9)}(1/2)} \geq 1,$$

ou si

$$\frac{c_I}{c_{II}} \geq 6.494968.$$

La densité *a posteriori* $\mathrm{Be}(5, 9)$



La probabilité *a posteriori* $P(\theta \geq 1/2|x)$, plusieurs r

- Soit $n = 12$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\Omega_0 = [1/2, 1]$
- La probabilité *a posterior* dépend du r observé :

r	$P[\theta \in \Omega_0 \| x]$
0	0.0001220703
1	0.0017089844
2	0.0112304688
3	0.0461425781
4	0.1334228516
5	0.2905273437
6	0.5000000000
7	0.7094726563
8	0.8665771484
9	0.9538574219
10	0.9887695312
11	0.9982910156
12	0.9998779297

Test d'une hypothèse ponctuelle, une approche bayésienne

Un modèle composé, où le modèle $M \in \{H_0 : \theta = \frac{1}{2}, H_1 : \theta \neq \frac{1}{2}\}$, le paramètre θ et les données sont aléatoires :

$$\begin{aligned} f(M, \theta, x) = \Pr[M = H_0] 1_{\{H_0\}}(M) \delta_{1/2}(\theta)(1/2)^n \\ + \Pr[M = H_1] 1_{\{H_1\}}(M) f_{\mathrm{Be}}(\theta; \alpha, \beta) \theta^r (1-\theta)^{n-r}. \end{aligned}$$

Après l'intégration par rapport à θ,

$$f(M, x) = \Pr[M = H_0] 1_{\{H_0\}}(M) f_0(x) + \Pr[M = H_1] 1_{\{H_1\}}(M) f_1(x),$$

où

$$f_0(x) = (1/2)^n, \quad f_1(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+r)\Gamma(\beta+n-r)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)}.$$

(cont.)

- Les probabilités posterieures :

$$\Pr[M = H_0|x] = \frac{\Pr[M = H_0]f_0(x)}{\Pr[M = H_0]f_0(x) + \Pr[M = H_1]f_1(x)}$$

$$\Pr[M = H_1|x] = \frac{\Pr[M = H_1]f_1(x)}{\Pr[M = H_0]f_0(x) + \Pr[M = H_1]f_1(x)}$$

- Le rapport de chances (rapport des cotes) postérieur :

$$\frac{\Pr[M = H_0|x]}{\Pr[M = H_1|x]} = \frac{\Pr[M = H_0]}{\Pr[M = H_1]} \cdot \frac{f_0(x)}{f_1(x)},$$

  où
  - Le premier facteur est le rapport des cotes *a priori*
  - Le deuxième facteur est le facteur de Bayes, le ratio de *vraisemblances marginales*
  - La vraisemblance marginal $f_0(x)$ est un genre de score de succès de prévision hors échantillon du modèle H_0 où $\theta = \frac{1}{2}$
  - $f_1(x)$ est celui du modèle H_1.

La décision optimale

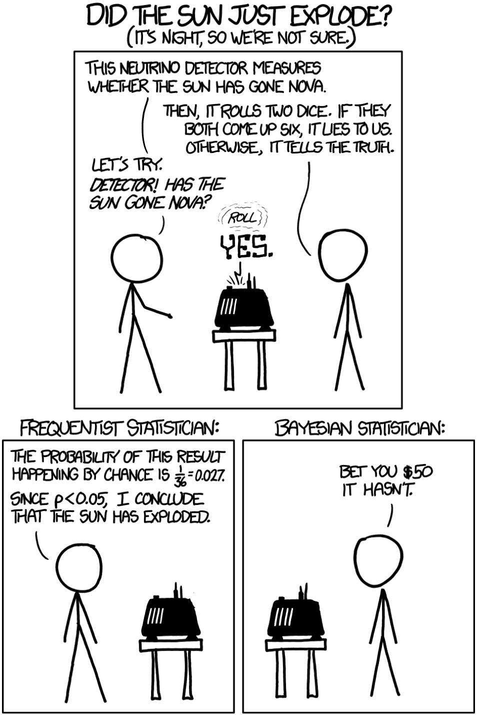
Pour la loi *a priori* $\mathrm{Be}(\alpha, \beta)$, $\alpha = \beta = 1$, $r = 4$ et $n = 12$,

$$f_0(x) = 2.4414062 \times 10^{-4},$$

$$f_1(x) = 1.5540016 \times 10^{-4},$$

$$\frac{f_0(x)}{f_1(x)} = 1.5710449$$

$$\delta(x) = \begin{cases} a_0 & \frac{c_I}{c_{II}} \frac{\Pr[M=H_0]}{\Pr[M=H_1]} \frac{f_0(x)}{f_1(x)} \geq 1, \\ a_1 & \text{autrement.} \end{cases}$$


DID THE SUN JUST EXPLODE?
(IT'S NIGHT, SO WE'RE NOT SURE.)
THIS NEUTRINO DETECTOR MEASURES WHETHER THE SUN HAS GONE NOVA.
THEN, IT ROLLS TWO DICE. IF THEY BOTH COME UP SIX, IT LIES TO US. OTHERWISE, IT TELLS THE TRUTH.
LET'S TRY.
DETECTOR! HAS THE SUN GONE NOVA?
ROLL
YES.
FREQUENTIST STATISTICIAN:
THE PROBABILITY OF THIS RESULT HAPPENING BY CHANCE IS $\frac{1}{36}=0.027$.
SINCE $p<0.05$, I CONCLUDE THAT THE SUN HAS EXPLODED.
BAYESIAN STATISTICIAN:
BET YOU $50 IT HASN'T.