Examen des préalables, ECN 6578

2021-01-15

Questions

1. La fonction de répartition d'une loi exponentielle est $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, où $\lambda > 0$ est un paramètre. Le taux d'incidence d'une variable aléatoire X non-négative est la fonction $h(x) = f(x)/(1 - F(x))$, où $F(x)$ est sa fonction de répartition et $f(x)$ est sa fonction de densité. Trouvez le taux d'incidence d'une loi exponentielle.

2. Trouvez le vecteur p (des prix d'états) qui vérifie l'équation $G'p = \iota$, où
$$G = \begin{bmatrix} 1 + R_f & 1 + R_1 \\ 1 + R_f & 1 + R_2 \end{bmatrix}, \qquad \iota = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
et $R_1 < R_f < R_2$ sont constants.

3. Trouvez les racines de l'équation $1 - 1.6x - 0.63x^2 = 0$.

4. Soit c_1 et c_2 des constantes arbitraires. Montrez que chacune des séquences $\rho_k^{(1)} = c_1(0.9)^k$ et $\rho_k^{(2)} = c_2(0.7)^k$, $k = 0, 1, \ldots$, vérifie l'équation de récurrence $\rho_k = 1.6\rho_{k-1} - 0.63\rho_{k-2}$.

5. Soit X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes avec moyennes μ_1, μ_2 et μ_3 et variances σ_1^2, σ_2^2 et σ_3^2. Trouvez $\mathrm{Var}[a + bX_1 + cX_2]$ et $\mathrm{Cov}[a + bX_1 + cX_2, d + eX_1 + fX_3]$, où a, b, c, d, e et f sont des constantes.

6. Soit X_i une séquence de variables aléatoires indépendentes du type gamma, avec paramètres α et β : $X_i \sim \mathrm{iid}\,\mathrm{Ga}(\alpha, \beta)$. La fonction de densité pour X_i est
$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}.$$
Donnez la densité conjointe $f(x_1, \ldots, x_n)$ de $(X_1, \ldots, X_n)$ comme fonction des paramètres (α et β), $\sum_{i=1}^n x_i$ et $\prod_{i=1}^n x_i$.

7. Trouvez les valeurs (C_1^*, C_2^*) qui maximisent $U(C_1, C_2) = C_1^{1/2} + \delta C_2^{1/2}$ sous la contrainte $C_1 + C_2/(1 + R) = m$, où $m > 0$ et $R > 0$ sont constants.

8. Supposons que c_1 et c_2 sont scalaires, ι et μ sont des vecteurs $n \times 1$ et Ω est une matrice inversible $n \times n$. Simplifiez l'expression $(c_1\Omega^{-1}\iota)'\Omega(c_2\Omega^{-1}\mu)$.