Faculté des arts et des sciences
Département de sciences économiques

EXAMEN INTRA

Lundi 7 mars 2022, de 8h30 à 11h15

ECN 6578A **ÉCONOMÉTRIE DES MARCHÉS FINANCIERS** HIVER 2022

Professeur :	William MCCAUSLAND
Directives pédagogiques :	Documentation **non permise**, calculatrice non programmable **permise**.
Pondération :	Cet examen compte pour 35% de la note finale.

1. (15 points) Le 1er mars 1995, un investisseur construit un portefeuille à partir de deux fonds communs de placement : un fonds d'actions et un fonds d'obligations. L'investisseur place 2000$ dans le fonds d'actions et 1000$ dans le fonds d'obligations. L'investisseur tient le portefeuille jusqu'au 1er mars 2022. Les log rendements pour la période (de 1995 à 2022) sont $r_a = 1.9$ pour le fonds d'actions et $r_o = 0.4$ pour le fonds d'obligations. Quel est le log-rendement annualisé du portefeuille ?
2. (20 points) Considérez le processus suivant :

$$r_t = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{2} r_{t-1} + a_t + \tfrac{1}{3} a_{t-1},$$

   où a_t est un bruit blanc faible avec variance unitaire.
   (a) Identifiez le modèle.
   (b) Quelle est la moyenne conditionnelle $E[r_t|F_{t-1}]$?
   (c) Quelle est la moyenne inconditionnelle $E[r_t]$?
   (d) Trouvez μ, ψ_0 et ψ_1 de l'expansion moyenne-mobile $r_t = \mu + (\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^i) a_t$ du processus.
3. (10 points) Supposez que les rendements journaliers d'un actif sont stationnaires et suivent un modèle GARCH(1,1) gaussien avec $\alpha_0 = 4.2 \times 10^{-6}$, $\alpha_1 = 0.12$ et $\beta = 0.85$. Selon les donnés observées, $\sigma_t = 0.012$ et $r_t = -0.0070$.
   (a) Quelle est la variance conditionnelle $\mathrm{Var}[r_{t+1}|F_t]$? Montrez vos calculs.
   (b) Quelle est la variance inconditionnelle $\mathrm{Var}[r_t]$? Montrez vos calculs.
4. (20 points) Dans le context du modèle CAPM, nous avons vu qu'il existe des vecteurs g et h tels que pour chaque $\mu_p \in \mathbb{R}$, $\omega^* = g + \mu_p h$ est la solution *unique* du problème

$$\min_{\omega} \tfrac{1}{2} \omega^\top \Omega \omega \text{ tel que } \omega^\top \mu = \mu_p,\ \omega^\top \iota = 1,$$

   où Ω est défini positif.
   (a) Soit q (avec vecteur de poids ω_q) et q' (avec vecteur de poids $\omega_{q'}$) deux portefeuilles distincts sur la frontière minimum variance (FMV). Démontrez que le portefeuille avec poids $\omega_r \equiv \lambda\omega_q + (1-\lambda)\omega_{q'}$ est sur la FMV, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Identifiez clairement où vous utilisez l'unicité de la solution $\omega^* = g + \mu_p h$ du problème ci-haut.
   (b) Trouvez la moyenne et la variance du rendement de ce portefeuille, en termes de λ, ω_q, $\omega_{q'}$, μ et Ω.
   (c) Expliquez l'importance du résultat en (a) pour le modèle CAPM.

5. (20 points) Considérez un modèle où la durée d_i, en secondes, entre deux transactions consécutives suit une loi exponentielle avec paramètre λ et que les durées sont indépendantes. La densité et la moyenne de d_i sont

$$f(d_i|\lambda) = \lambda e^{-\lambda d_i}, \qquad E[d_i|\lambda] = 1/\lambda.$$

Pendant une heure on observe l'heure de $n+1$ transactions et on calcule les durées $d_1, d_2, \ldots, d_n$ entre elles.

(a) Trouvez l'estimateur maximum de vraisemblance de λ.

(b) Supposez que vous avez choisi une loi *a priori* Gamma, avec paramètres α et β, pour le paramètre inconnu λ. La densité et la moyenne de λ sont

$$f(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}, \qquad E[\lambda] = \alpha/\beta.$$

Trouvez la moyenne *a posteriori* de λ.

6. (15 points) Supposez que vous avez un échantillon $r_1, \ldots, r_T$ de rendements journaliers observés dans un marché financier. A quelles caractéristiques qualitatives vous attendez-vous pour

(a) la fonction d'autocorrélation de r_t ?

(b) la fonction d'autocorrélation de r_t^2 ?

(c) l'applatissement de l'échantillon ?