EXAMEN FINAL

Jeudi 14 avril 2022, de 8h30 à 11h15

ECN 6578A **ÉCONOMÉTRIE DES MARCHÉS FINANCIERS** HIVER 2022

Professeur :	William MCCAUSLAND
Directives pédagogiques :	Documentation **non permise**, calculatrice non programmable **permise**.
Pondération :	Cet examen compte pour 35% de la note finale.

1. (30 points) Considérez un environnement avec deux périodes. La valeur $s \in \{1, 2\}$ d'un état du monde est inconnue à la première période et connue à la deuxième période. À la première période, la probabilité de l'état s est de π_s, $s = 1, 2$. Il y a $N = 2$ actifs. L'actif i coûte q_i à la première période et paie X_{si} à la deuxième, $i = 1, 2$ et $s = 1, 2$. La matrice des paiements X, le vecteur des prix des actifs q et le vecteur des probabilités des deux états sont
$$X = \begin{bmatrix} 500 & 400 \\ 600 & \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} 515 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \pi = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$
où α_1 et α_2 sont des paramètres.
   (a) (20 points) Supposons que $\alpha_1 = 700$ et $\alpha_2 = 500$.
      i. Donnez le vecteur des prix d'états.
      ii. Donnez le facteur d'actualisation stochastique.
      iii. Quel serait le prix d'un actif qui paie 500\$ dans l'état 1 et 550\$ dans l'état 2 ?
      iv. Est-ce que le marché est complet ? Est-ce qu'il y a une possibilité d'arbitrage ?
   (b) (5 points) Pour quelles valeurs de α_1 et α_2 est-il vrai et que le marché est incomplet et qu'il n'y a pas d'arbitrage ?
   (c) (5 points) Si $\alpha_2 = 500$, pour quelles valeurs de α_1 est-ce qu'il n'y a pas d'arbitrage ?
2. (10 points) Considérez un économie stochastique avec deux périodes. La première période est déterministe et dans la deuxième période il y a deux états du monde possibles, avec probabilités $\pi = 0.1$ et $1 - \pi = 0.9$. Il y a un consommateur représentatif avec fonction d'utilité
$$U(C_t) + \delta E[U(C_{t+1})] = U(C_t) + \delta \left[\pi U(C_{t+1,1}) + (1 - \pi) U(C_{t+1,2})\right],$$
où C_t est la consommation dans la première période et C_{t+1} est la consommation aléatoire dans la deuxième période : $C_{t+1,i}$ est la consommation dans la deuxième période si l'état i se produit, $i = 1, 2$. Soit $U(C) = \log C$ et $\delta = 0.97$. Supposez que le marché est complet. En équilibre où le consommateur maximise son utilité sous les contraintes imposées par les prix d'actifs et sa richesse, la consommation est de $C_t = 100$, $C_{t+1,1} = 80$, $C_{t+1,2} = 102$.
   (a) (5 points) Donnez le facteur d'actualisation à la première période qu'on peut utiliser pour valoriser des paiements aléatoires de la seconde période.
   (b) (5 points) Quel est le prix à la première période d'un actif qui paie un dollar dans la seconde période, peu importe l'état du monde réalisé ?

3. (5 points) Considérez la condition de moment suivante pour estimer les paramètres δ et γ du modèle CCAPM avec utilité isoélastique :

$$E[((1 + R_{i,t+1})\delta(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma} - 1)Z_t] = 0.$$

Pourquoi est-ce important que Z_t soit une variable connue par le consommateur à t ?

4. (15 points) Supposez que les rendements journaliers d'un actif suivent un modèle GARCH(1,1) t de Student avec $\alpha_0 = 3.9 \times 10^{-6}$, $\alpha_1 = 0.11$, $\beta_1 = 0.86$. La valeur du paramètre t de Student est de $\nu = 12$. La moyenne conditionnelle du rendement est constante : $\mu_t = 0.00025$. Selon les données observées, $\sigma_n = 0.012$ et $r_n = -0.0070$. Quelle est la valeur à risque pendant une période d'un jour d'un montant de cet actif qui vaut 10000 dollars à $t = n$? Utilisez une probabilité de perte $p = 0.01$.

5. (20 points) CAPM.
   (a) (10 points) Dans le context du modèle CAPM, on a vu qu'il existe des vecteurs g et h tels que le vecteur $\omega = g + \mu_p h$ est la solution unique du problème

   $$\min_{\omega} \omega'\Omega\omega \text{ tel que } \omega'\mu = \mu_p,\ \omega'\iota = 1,$$

   où la moyenne μ et la variance Ω d'un vecteur de rendements simples sont données. Indiquez dans vos réponses où vous utilisez l'existence et l'unicité de la solution $g + \mu_p h$.
      i. Montrez que pour tous portefeuilles p (vecteur de poids ω_p) et q (vecteur de poids ω_q) sur la frontière minimum variance, et tout λ réel, le portefeuille avec vecteur de poids $\lambda\omega_p + (1 - \lambda)\omega_q$ s'y trouve lui aussi.
      ii. Prouvez que pour tous portefeuilles distincts p (vecteur de poids ω_p), q (vecteur de poids ω_q) et r (vecteur de poids ω_r) sur la frontière minimum variance, il existe un λ réel tel que $\omega_r = \lambda\omega_p + (1-\lambda)\omega_q$.
   (b) (5 points) Quelle est la frontière efficace ? Pourquoi, selon le CAPM, le portefeuille de chaque individu et le portefeuille du marché se trouvent-t-ils sur la frontière efficace ?
   (c) (5 points) Identifiez l'effet de taille ; expliquez pourquoi il soulève un doute contre le modèle CAPM et expliquez comment un biais de sélection pourrait exagérer l'effet de taille.

6. (5 points) Dans un monde à temps discret sans arbitrage, supposez que le log facteur d'actualisation stochastique est i.i.d. $N(\mu, \sigma^2)$. Donnez le prix à t d'une obligation qui paie 1 dollar à $t + n$. (Si $X \sim N(\mu, \sigma)$, $E[e^X] = e^{\mu+\sigma^2/2}$.)

7. (15 points) Considérez le tableau suivant des prix P_{nt} d'obligation. P_{nt} est le prix à t d'une obligation qui paie un dollar à $t + n$.

$n\backslash t$	0	1	2
1	0.990	0.985	0.990
2	0.980	0.975	
3	0.960		

   (a) (5 points) Trouvez les valeurs Y_{20} et y_{20} du rendement net simple à l'échéance et du log rendement à l'échéance, à $t = 0$, d'une obligation qui paie un dollar à $t = 2$.
   (b) (5 points) Trouvez le rendement R_{31} réalisé lorsqu'on détient, entre $t = 0$ et $t = 1$, l'obligation qui paie un dollar à $t = 3$. À quelle période ce rendement est-il observé ?
   (c) (5 points) Trouvez la valeur du cours à terme F_{20}. À quelle période est-il observé ?