Université de Montréal
Faculté des arts et des sciences
Département de sciences économiques

EXAMEN FINAL

Lundi 19 avril 2021, de 9h à 12h

ECN 6578A **ÉCONOMÉTRIE DES MARCHÉS FINANCIERS** HIVER 2021

Professeur :	William MCCAUSLAND
Directives pédagogiques :	Documentation **permise**, aucune communication entre étudiants n'est permise.
Pondération :	Cet examen compte pour 35% de la note finale.

1. (20 points) Considérez un modèle où le nombre c_i de transactions pendant l'heure i, $i = 1, \ldots, n$, suit une loi Poisson avec moyenne λ et où les nombres de transactions sont indépendants d'heure en heure. Supposez que vous avez choisi une loi *a priori* Gamma, avec paramètres α et β, pour le paramètre inconnu λ. La moyenne *a priori* de λ est α/β. Pendant n heures on observe le vecteur $c = (c_1, \ldots, c_n)$ de comptes de transactions. La densité de la loi $\mathrm{Ga}(\alpha, \beta)$ et la fonction de masse de la loi $\mathrm{Po}(\lambda)$ sont

$$f(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}, \quad \Pr[c_i = k|\lambda] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

   (a) Quelle est la densité *a posteriori* de λ et quelle est sa moyenne *a posteriori* ?

   (b) Développez une expression pour la fonction de masse prédictive $\Pr[c_{n+1} = k|c]$.

   (c) Exprimez la fonction de masse prédictive en forme réduite.

   (d) Si vous avez un échantillon $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(M)}$ de la loi *a posteriori* de λ, comment pouvez-vous estimer $\Pr[c_{n+1} = k|c]$, pour k donné, numériquement ?

2. (30 points) Facteurs d'actualisation stochastiques et les modèles du type CCAPM.

   (a) (15 points) Considérez l'environment de la page 295 de Campbell, Lo and MacKinlay (CLM). Supposez qu'il y a deux actifs et deux états. La matrice des paiements X, le vecteur des prix des actifs q et le vecteur des probabilités des deux états sont

$$X = \begin{bmatrix} 500 & 400 \\ 600 & 700 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} 515 \\ 500 \end{bmatrix}, \quad \pi = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

      i. Donnez le vecteur des prix d'états.

      ii. Donnez le facteur d'actualisation stochastique.

      iii. Est-ce que le marché est complet ? Est-ce qu'il y a une possibilité d'arbitrage ?

      iv. Quel serait le prix d'un actif sans risque qui paie 500$ à la deuxième période ?

   (b) (10 points) Considérez un économie stochastique avec deux périodes. La première période est déterministe et dans la deuxième période il y a deux états du monde possibles, avec probabilités $\pi = 0.1$ et $1-\pi = 0.9$. Il y a un consommateur représentatif avec fonction d'utilité

$$U(C_t) + \delta E[U(C_{t+1})] = U(C_t) + \delta \left[\pi U(C_{t+1,1}) + (1-\pi) U(C_{t+1,2})\right],$$

   où C_t est la consommation dans la première période et C_{t+1} est la consommation aléatoire dans la deuxième période : $C_{t+1,i}$ est la consommation dans la deuxième période si l'état i se produit, $i = 1, 2$. Soit $U(C) = 2C^{1/2}$ et $\delta = 0.97$. Supposez que le marché est complet. En équilibre où le consommateur maximise son utilité sous les contraintes imposées par les prix d'actifs et sa richesse, la consommation est de $C_t = 100$, $C_{t+1,1} = 80$, $C_{t+1,2} = 102$.

i. Donnez la facteur d'actualisation à la première période pour valoriser les paiements de la seconde période.

ii. Quel est le prix à la première période d'un actif qui paie un dollar dans la seconde période, peu importe l'état du monde réalisé ?

(c) (5 points) Considérez la condition de moment suivante pour estimer les paramètres δ et γ du modèle CCAPM avec utilité isoélastique :

$$E[((1+R_{i,t+1})\delta(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma}-1)Z_t]=0.$$

Pourquoi est-ce important que Z_t soit une variable connue par le consommateur à t ?

3. (20 points) CAPM.

(a) Dans le context du modèle CAPM, on a vu qu'il existe des vecteurs g et h tels que le vecteur $\omega = g + \mu_p h$ est la solution unique du problème

$$\min_{\omega} \omega'\Omega\omega \text{ tel que } \omega'\mu = \mu_p,\ \omega'\iota = 1,$$

où la moyenne μ et la variance Ω d'un vecteur de rendements simples sont données.

i. Soit p (avec vecteur de poids ω_p) et p (vecteur de poids $\omega_{p'}$) deux portefeuilles distincts sur la frontière minimum variance (FMV). Soit q (vecteur de poids ω_q) un portefeuille qui n'est pas sur la FMV. Démontrez que ω_q n'est pas une combinaison linéaire de ω_p et $\omega_{p'}$.

ii. Trouvez la covariance entre les rendements des portefeuilles p et p' et simplifiez.

(b) Pourquoi, selon le CAPM, le rendement du marché se trouve-t-il sur la frontière efficace ?

(c) Identifiez l'effet de taille ; expliquez pourquoi il soulève un doute contre le modèle CAPM et expliquez comment un biais de sélection pourrait exagérer l'effet de taille.

4. (15 points) Supposez que les rendements journaliers d'un actif suivent un modèle GARCH(1,1) t de Student avec $\alpha_0 = 3.9 \times 10^{-6}$, $\alpha_1 = 0.11$, $\beta_1 = 0.86$. La valeur du paramètre t de Student est de $\nu = 12$. La moyenne conditionnelle du rendement est constante : $\mu_t = 0.00025$. Selon les données observées, $\sigma_n = 0.012$ et $r_n = -0.0070$. Quelle est la valeur à risque pendant une période d'un jour d'un montant de cet actif qui vaut 10000 dollars à $t = n$? Utilisez une probabilité de perte $p = 0.01$.

5. (15 points) Modèle à trois facteurs de Fama et French.

(a) Quels sont les trois facteurs qui rendent compte de la coupe transversale de rendements moyens des actions ?

(b) Décrivez brièvement (3 phrases par facteur ou moins) comment ces facteurs sont construits.