

ECN 6578A, Économétrie des marchés financiers,  
Hiver 2023

Cours 8 et 9

William McCausland

2023-03-19

## Le facteur d'actualisation dans un monde sans risque

- ▶ Supposons un monde sans risque, avec taux d'intérêt  $R_t$ .
- ▶ La valeur à  $t$  d'un dollar un an plus tard est de

$$M_{t+1} = \frac{1}{1 + R_{t+1}} = \frac{P_t}{P_{t+1}}.$$

- ▶ On appelle  $M_{t+1}$  le facteur d'actualisation.
- ▶ Il actualise (donne une valeur à  $t$  à) un paiement à  $t + 1$ .
- ▶ L'absence d'arbitrage entraîne, pour chaque actif  $i$ ,

$$P_{it} = P_{i,t+1} M_{t+1}.$$

- ▶ En termes équivalents,

$$\frac{P_{i,t+1}}{P_{it}} M_{t+1} = (1 + R_{i,t+1}) M_{t+1} = 1.$$

## Le facteur d'actualisation stochastique (FAS)

- ▶ Le FAS  $M_t$  vérifie pour tout actif (ou portefeuille)  $i$  :

$$P_{it} = E_t[P_{i,t+1}M_{t+1}], \quad E_t[(1 + R_{i,t+1})M_{t+1}] = 1.$$

- ▶ Notez bien que  $M_t$  ne dépend pas de  $i$ .
- ▶ Version inconditionnelle (prendre l'espérance des deux côtés) :

$$E[(1 + R_{i,t+1})M_{t+1}] = 1.$$

- ▶ Du point de vue de la période  $t - 1$  :

$$E[(1 + R_{it})M_t] = 1.$$

- ▶ Avec  $\text{cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$ , on obtient

$$1 = \text{cov}[R_{it}, M_t] + E[1 + R_{it}]E[M_t]$$
$$E[1 + R_{it}] = \frac{1}{E[M_t]}(1 - \text{cov}[R_{it}, M_t]). \quad (1)$$

## Le rendement zéro-bêta

- ▶ Un actif à rendement  $R_{ot}$  est un actif *zéro-bêta inconditionnel* si  $\text{cov}[R_{ot}, M_t] = 0$ .
- ▶ Pour un tel actif,

$$E[1 + R_{ot}] = \frac{1}{E[M_t]},$$

et on obtient (soustraire cette équation de (1))

$$E[R_{it} - R_{ot}] = -E[1 + R_{ot}]\text{cov}[R_{it}, M_t].$$

- ▶ Remarquez qu'un actif sans risque est toujours un actif zéro-bêta inconditionnel. (Une constante est non-corrélée avec n'importe quelle v.a.)

## Deux approches à la dérivation du FAS

- ▶ absence de l'arbitrage (hypothèse moins forte) et
- ▶ maximisation de l'utilité (plus forte).

# Absence d'arbitrage et le FAS

- ▶ Voici un milieu très simple :
  - ▶ Il y a deux périodes.
  - ▶ L'état du monde est aléatoire dans la deuxième période.
  - ▶ Il y a  $S$  états du monde possibles :  $1, \dots, S$ .
  - ▶ Chaque état  $s$  a une probabilités  $\pi_s$  d'être réalisé.
  - ▶ Il y a  $N$  actifs, chacun avec un paiement dans la deuxième période qui dépend de  $s$ .
  - ▶ Actif  $i$  a un prix  $q_i$  en période 1.
  - ▶ Actif  $i$  paie  $X_{si}$  si l'état  $s$  se produit.
  - ▶  $\pi (S \times 1)$ ,  $X (S \times N)$  et  $q (N \times 1)$  sont primitifs.
- ▶ Pour un portefeuille  $\omega \in \mathbb{R}^N$ ,
  - ▶  $\omega^\top q$  est le prix de  $\omega$  dans la première période,
  - ▶  $X\omega \in \mathbb{R}^S$  donne sa valeur dans la deuxième période, selon l'état.
- ▶ Un arbitrage est un portefeuille  $\omega \in \mathbb{R}^n$  tel que
  - ▶  $\omega^\top q \leq 0$  (on ne paie rien dans la première période)
  - ▶  $X\omega \geq 0$  (on ne peut pas perdre dans la deuxième), et
  - ▶  $X\omega \neq 0$  (on gagne dans au moins un état du monde).

## Prix et rendements

- ▶ Vecteur  $q$  donne les prix à la période 1 :

$$q_{N \times 1} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix}.$$

- ▶ Matrice  $X$  donne les paiements des actif :

$$X_{S \times N} = \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{S1} & \cdots & X_{SN} \end{bmatrix}.$$

- ▶ Matrix  $G$  donne le rendement brut de l'actif  $i$  en état  $s$  ( $G_{si} = X_{si}/q_i$ ):

$$G_{S \times N} = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{S1} & \cdots & G_{SN} \end{bmatrix}.$$

## Prix d'états

- ▶ L'idée : le prix de l'état  $s$  est le prix dans la première période d'un actif qui paie 1 si l'état se produit, 0 autrement.
- ▶ Définition : vecteur  $p$  ( $S \times 1$ ) est un vecteur des prix d'états si

$$X'p = q,$$

ou, ce qui est équivalent, si pour chaque actif  $i$ ,

$$q_i = \sum_{s=1}^S X_{si} p_s.$$

- ▶ Si on divise chaque rangée  $i$  de  $X'p = q$  par  $q_i$ , on obtient

$$G'p = \iota.$$

- ▶ Ligne  $i$  de cette équation vectorielle,  $i = 1, \dots, N$  :

$$1 = \sum_{s=1}^S G_{si} p_s = \sum_{s=1}^S (1 + R_{si}) p_s.$$

## Implications de l'absence d'arbitrage

- ▶ Possible en principe : aucun vecteur  $p$ , un  $p$ , plusieurs  $p$  (une question d'algèbre linéaire)
- ▶ Résultat très important : pas d'arbitrage ssi il existe un vecteur  $p$  positif des prix d'états.
- ▶ Si, en plus,  $\text{rang}(X) = S$ , le marché est dit complet et le vecteur  $p$  est unique.
- ▶ On peut définir une variable aléatoire  $M$ , qui s'avère être le FAS : dans chaque état  $s$ ,  $M_s = p_s/\pi_s$ .
- ▶ L'absence d'arbitrage implique qu'il existe un  $p$  positif t.q.  $G'p = \iota$ .
- ▶ Donc,  $M > 0$  et

$$1 = \sum_{s=1}^S p_s(1 + R_{si}) = \sum_{s=1}^S \pi_s M_s(1 + R_{si}) = E[(1 + R_i)M].$$

- ▶ Le résultat se généralise (plusieurs périodes, temps continu).

## Maximisation d'utilité espérée intertemporelle

- ▶ Voici une fonction d'utilité sur les chemins aléatoires  $\{C_\tau\}_{\tau=t}^\infty$  de la consommation (mesurée en dollars réels) :

$$V = E_t \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j U(C_{t+j}) \right].$$

- ▶  $V$  est additivement séparable en temps,
- ▶  $V$  est additivement séparable en état (utilité espérée)
- ▶ Le taux de préférence de temps ( $\delta$ ) est constant.
- ▶ La maximisation de  $V$  sous des contraintes (richesse, actifs disponibles) donne plusieurs conditions de première ordre, dont

$$U'(C_t) = \delta E_t[(1 + R_{i,t+1})U'(C_{t+1})],$$

où  $R_{i,t+1}$  est le rendement réel de l'actif  $i$  à  $t + 1$ .

- ▶ C'est une équation dite d'Euler.

# Maximisation d'utilité et le FAS

- ▶ Le FAS est le taux marginal inter-temporel de substitution:

$$M_{t+1} = \delta U'(C_{t+1})/U'(C_t),$$

qui est toujours positif.

- ▶ Intuition pour

$$E[R_{it} - R_{ot}] = -E[1 + R_{ot}] \text{cov}[R_{it}, M_t] :$$

- ▶ Si  $\text{cov}[R_{it}, M_t] > 0$ ,  $i$  a une valeur relativement élevée quand la consommation future est plus valorisée (i.e. quand  $U'(C_{t+1})$  est élevé).
- ▶ En équilibre, son prix est plus élevé (par rapport à un actif  $j$  où  $\text{cov}[R_{jt}, M_t] < 0$ ) et son rendement moyen est moins élevé.
- ▶ L'investisseur supporte ce rendement moyen moins élevé car l'actif paie plus quand la consommation est plus valorisée.

# Le modèle CCAPM

- ▶ L'équation

$$1 = E_t[(1 + R_{i,t+1})M_{t+1}],$$

avec

$$M_{t+1} = \delta \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)},$$

où  $C_t$  est la consommation agrégée est le modèle CCAPM (C pour consommation).

- ▶ Comme le CAPM, le CCAPM explique la coupe transversale des moyennes des rendements.
- ▶ Il donne aussi une relation entre la consommation et la coupe transversale des rendements.

## La fonction d'utilité isoélastique

- ▶ La fonction d'utilité isoélastique est

$$U(C_t) = \frac{C_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}, \quad \gamma > 0.$$

- ▶  $\lim_{\gamma \rightarrow 1} U(C_t) = \log C_t$
- ▶ Dans le contexte où les agents maximisent l'espérance de  $U(C_t)$  isoélastique, l'aversion relative pour le risque est constante et égale à  $\gamma$  :

$$-C_t \frac{U''(C_t)}{U'(C_t)} = \gamma$$

- ▶ Dans un modèle inter-temporel séparable dans le temps avec l'utilité isoélastique à chaque période, l'élasticité de substitution inter-temporelle est constante, et égale à  $\psi = \gamma^{-1}$ .

## Un problème à deux périodes sans incertitude

- ▶ Supposez qu'il y a un rendement  $R$  sans risque.

$$\max_{C_t, C_{t+1}} U(C_t) + \delta U(C_{t+1}) \quad \text{tel que} \quad C_t + \frac{1}{1+R} C_{t+1} = m$$

- ▶ Conditions nécessaires pour un max:

$$\delta C_{t+1}^{-\gamma} - \frac{1}{1+R} C_t^{-\gamma} = 0 \quad (\text{proportions})$$

$$C_t + \frac{1}{1+R} C_{t+1} = m \quad (\text{niveaux})$$

$$\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma} = \frac{1}{\delta(1+R)}$$

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = [\delta(1+R)]^{1/\gamma}$$

$$\Delta c_{t+1} = c_{t+1} - c_t \equiv \log \frac{C_{t+1}}{C_t} = \frac{1}{\gamma} \log \delta + \frac{1}{\gamma} \log(1+R)$$

## Remarques sur le problème à deux périodes

- ▶  $\log \frac{C_{t+1}}{C_t}$  est la log-croissance de la consommation,
- ▶  $\frac{1}{\gamma}$  est l'élasticité de substitution inter-temporelle,
- ▶  $r = \log(1 + R)$  est le log taux d'intérêt,
- ▶ Invariance de l'échelle:  $C_{t+1}/C_t$  ne dépend pas de  $m$ :  $\{C_t\}$  pour un riche est un multiple de celui d'un pauvre.
- ▶ Le lien entre le risque et la substitution n'est pas flexible.
- ▶  $C_t$  agrégée: si tout le monde a une utilité isoélastique avec le même  $\gamma$  et  $\delta$ ,  $C$  agrégée est celle d'un consommateur avec cette utilité ayant la richesse agrégée.
- ▶ Ainsi, l'utilité isoélastique est une rationalisation du consommateur représentatif, un seul consommateur dans le modèle.

## Tester le CCAPM

- ▶ Le CCAPM avec l'utilité isoélastique devient

$$1 = E_t \left[ (1 + R_{i,t+1}) \delta \left( \frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \right] \quad (2)$$

- ▶ Pour tester le CCAPM, on peut estimer  $\gamma$  et tester cette restriction sous une hypothèse supplémentaire :  $(1 + R_{it}, C_t)$  est log-normal et homoscedastique.

## La loi log-normale

- ▶ Définition :

$$X \sim LN(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \log X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- ▶ Moments :

$$\log E[X] = E[\log X] + \frac{1}{2} \text{var}[\log X] = \mu + \sigma^2/2,$$

$$E[X] = e^{\mu + \sigma^2/2}.$$

- ▶ Si  $(X, Y)$  est log-normal multivarié,  $XY$  est log-normal :

$$\begin{bmatrix} \log X \\ \log Y \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \right),$$

$\log XY = \log X + \log Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY})$ , et

$$E[XY] = \exp(\mu_X + \mu_Y + \frac{1}{2}(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY})).$$

## CCAPM avec log-normalité

- ▶ L'équation (2) en logarithmes :

$$0 = \log E_t \left[ (1 + R_{i,t+1}) \delta \left( \frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \right].$$

- ▶ Sous l'hypothèse supplémentaire de log-normalité,

$$0 = E_t[r_{i,t+1}] + \log \delta - \gamma E_t[\Delta c_{t+1}] + \frac{1}{2}(\sigma_i^2 + \gamma^2 \sigma_c^2 - 2\gamma \sigma_{ic})$$

- ▶  $\sigma_i^2$  est la variance de  $r_{i,t+1}$ ,
- ▶  $\sigma_c^2$  est la variance de  $\Delta c_{t+1}$ ,
- ▶  $\sigma_{ic}$  est la covariance entre  $r_{i,t+1}$  et  $\Delta c_{t+1}$
- ▶ Les variances conditionnelles égalent aux variances inconditionnelles par l'homoscédasticité.

## Ajouter un actif sans risque

- ▶ S'il existe un actif  $f$  sans risque,  $\sigma_f^2 = \sigma_{fc} = 0$ , et

$$r_{f,t+1} = -\log \delta - \frac{\gamma^2 \sigma_c^2}{2} + \gamma E_t[\Delta c_{t+1}]$$

- ▶ Pour un actif arbitraire  $i$ ,

$$E_t[r_{i,t+1} - r_{f,t+1}] = \gamma \sigma_{ic} - \sigma_i^2 / 2$$

- ▶ Version en rendements simples:

$$\log(E_t[(1 + R_{i,t+1}) / (1 + R_{f,t+1})]) = \gamma \sigma_{ic}$$

- ▶ La constance de cette prime de risque est une implication malheureuse de l'homoscédasticité, pas cohérente avec les données.

## Le casse-tête de la prime des actions (The Equity Premium Puzzle)

- ▶ Soit  $i$  l'indice S&P500
- ▶ Prenez l'effet de commerce (commercial paper) comme proxy pour  $f$ .
- ▶ Pendant 1889-1994, la moyenne de l'échantillon du  $R_i$  est de 6%. (2002-2021 : 6.4%)
- ▶ Celle du rendement log en excès est de 4%.
- ▶  $C_{t+1}/C_t$  est très lisse ( $\sigma_c = 0.033$ ),
- ▶ Sa covariance avec  $R_i$  est très faible ( $\sigma_{ic} = 0.0027$ ).
- ▶ Le coefficient de risque nécessaire pour expliquer ces faits est de 19, qui est peu crédible, selon les études micro.

## Le mystère du taux sans risque

- ▶ Version inconditionnelle de l'expression pour  $E_t[r_{f,t+1}]$  :

$$E[r_{ft}] = -\log \delta + \gamma g - \frac{\gamma^2 \sigma_c^2}{2}$$

où  $g = E[\Delta c_{t+1}]$ .

- ▶ Les moyennes historiques sont:
  - ▶  $E[r_{ft}]$ : 1.8%
  - ▶  $g$ : 1.8%
  - ▶  $\sigma_c$ : 3.3%
- ▶ Mais  $\gamma = 19$  implique  $\delta = 1.12 > 1$ .
- ▶ Intuition : une grande aversion pour le risque implique un très faible volonté à substituer intertemporellement. Avec  $C_{t+1}/C_t > 1$ , on a une forte désire à emprunter, qui n'est pas cohérent avec un taux d'intérêt bas et un  $\delta < 1$ .

## Les préférences Epstein-Zin

- ▶ Tentative à élucidé le casse-tête de la prime de risque avec des préférences qui brisent le lien entre  $\gamma$  (aversion pour le risque) et  $\psi$  (élasticité de substitution inter-temporelle), tout en maintenant l'invariance à l'échelle.
- ▶ La définition de l'utilité EZ est récursive:

$$U_t = \left\{ (1 - \delta) C_t^{(1-\gamma)/\theta} + \delta (E_t[U_{t+1}^{1-\gamma}])^{1/\theta} \right\}^{\theta/(1-\gamma)}$$

où

$$\theta = \frac{1 - \gamma}{1 - \psi^{-1}}.$$

- ▶ Notez que la restriction  $\psi^{-1} = \gamma$  donne  $\theta = 1$ .

## Utilité isoélastique comme cas spécial

► Pour  $\theta = 1$ ,

$$\begin{aligned}U_t^{1-\gamma} &= (1-\delta)C_t^{1-\gamma} + \delta E_t[U_{t+1}^{1-\gamma}] \\&= (1-\delta)C_t^{1-\gamma} + \delta(1-\delta)E_t C_{t+1}^{1-\gamma} + \delta^2 E_t[U_{t+2}^{1-\gamma}] \\&= (1-\delta)E_t \left[ \sum_{\tau=0}^{\infty} \delta^\tau C_{t+\tau}^{1-\gamma} \right].\end{aligned}$$

## Équation d'Euler pour les préférences E-Z

- Pour le contrainte budgétaire suivant :

$$W_{t+1} = (1 + R_{m,t+1})(W_t - C_t),$$

où  $W_t$  est la richesse de l'agent représentatif, y compris le capital humain, et  $R_{m,t+1}$  est le rendement du marché, EZ montrent que l'équation d'Euler est

$$1 = E_t \left[ \left\{ \delta \left( \frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-1/\psi} \right\}^\theta \left\{ \frac{1}{(1 + R_{m,t+1})} \right\}^{1-\theta} (1 + R_{i,t+1}) \right].$$

- Notez l'invariance de l'échelle : une équation pour le ratio  $C_{t+1}/C_t$ .
- Soit  $X_{t+1}$  l'intérieur de l'espérance.

## CCAPM avec E-Z et log-normalité

- ▶ Avec la log-normalité et l'homoscédasticité, on obtient

$$0 = E_t[\log X_{t+1}] + \frac{1}{2}\text{var}_t[\log X_{t+1}],$$

où

$$\log X_{t+1} = \theta \log \delta - \frac{\theta}{\psi} \Delta c_{t+1} - (1 - \theta)r_{m,t+1} + r_{i,t+1}.$$

- ▶ Avec les cas spéciaux  $r_i = r_m$  et  $r_i = r_f$  et le cas général  $r_i = r_i$ , on obtient

$$r_{f,t+1} = -\log \delta + \frac{\theta - 1}{2}\sigma_m^2 - \frac{\theta}{2\psi^2}\sigma_c^2 + \frac{1}{\psi}E_t[\Delta c_{t+1}]$$

$$E_t[r_{i,t+1}] - r_{f,t+1} = \left[ \theta \frac{\sigma_{ic}}{\psi} + (1 - \theta)\sigma_{im} \right] - \frac{\sigma_i^2}{2}$$

- ▶ La prime de risque est une somme pondérée de la covariance de  $r_i$  avec  $\Delta c_{t+1}$  et sa covariance avec  $r_m$ . Exercice: montrez que  $\theta = 1$  donne le CCAPM avec utilité isoélastique et que  $\theta = 0$  donne approximativement le CAPM.

## Utilité non-séparable

- ▶ Une autre tentative à élucidé le casse-tête de la prime de risque implique l'utilité non-séparable, tout en maintenant l'invariance à l'échelle:

$$U_t = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \frac{(C_{t+j}/X_{t+j})^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma},$$

où

- ▶ Habitude interne:  $X_t = C_{t-1}^\kappa$  où  $C_t$  est la consommation individuelle, ou
- ▶ Habitude externe:  $X_t = \bar{C}_{t-1}^\kappa$  où  $\bar{C}_t$  est la consommation agrégée.

## Habitude interne

- ▶ Avec l'habitude interne, la décision  $C_t$  a un effet sur  $X_{t+1}$ , ce dont le consommateur tient compte :

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_t}{\partial C_t} &= \frac{\partial}{\partial C_t} \left[ \frac{(C_t/C_{t-1}^\kappa)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \delta \frac{(C_{t+1}/C_t^\kappa)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \right] \\ &= \left( \frac{C_t}{C_{t-1}^\kappa} \right)^{-\gamma} \cdot \frac{1}{C_{t-1}^\kappa} + \delta \left( \frac{C_{t+1}}{C_t^\kappa} \right)^{-\gamma} \cdot (-\kappa) \cdot C_t^{-\kappa-1} \cdot C_{t+1} \\ &= C_t^{-\gamma} C_{t-1}^{\kappa(\gamma-1)} - \delta \kappa C_t^{\kappa(\gamma-1)} C_{t+1}^{-\gamma} (C_{t+1}/C_t)\end{aligned}$$

- ▶ Cette utilité marginale dépend de  $C_{t+1}$ , qui est aléatoire, et  $t$ . L'équation d'Euler est donc

$$E_t \left[ \frac{\partial U_t}{\partial C_t} \right] = \delta E_t \left[ (1 + R_{t+1}) \frac{\partial U_{t+1}}{\partial C_{t+1}} \right].$$

## Habitude externe

- ▶ Avec l'habitude externe, la décision  $C_t$  d'un individu n'a aucun effet sur  $X_t$ , mais en équilibre, tout le monde prend la même décision :

$$\frac{\partial U_t}{\partial C_t} = \frac{\partial}{\partial C_t} \left[ \frac{(C_t/X_t)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \right]_{X_t=C_{t-1}^\kappa} = \left( \frac{C_t}{X_t} \right)^{-\gamma} \cdot \frac{1}{X_t} = C_t^{-\gamma} C_{t-1}^{\kappa(\gamma-1)}$$

$$M_{t+1} = \delta \frac{\partial U_{t+1}/\partial C_{t+1}}{\partial U_t/\partial C_t} = \delta \frac{C_{t+1}^{-\gamma} C_t^{\kappa(\gamma-1)}}{C_t^{-\gamma} C_{t-1}^{\kappa(\gamma-1)}}$$

- ▶ Avec log-normalité et homoscedasticité,

$$E_t[r_{i,t+1} - r_{f,t+1}] + \sigma_i^2/2 = \gamma \sigma_{ic}$$

$$r_{f,t+1} = -\log \delta - \gamma^2 \sigma_c^2/2 + \gamma E_t[\Delta c_{t+1}] - \kappa(\gamma - 1) \Delta C_t$$

- ▶ La prime de risque ne change pas.
- ▶ Encore seulement une  $\gamma$  très grande peut expliquer les données.
- ▶ Mais une telle aversion pour le risque est plus cohérente avec un rendement sans risque plus bas.

## Motivation pour la GMM

- ▶ GMM, c'est la Méthode de Moments Généralisée
- ▶ La log-normalité de  $(C_{t+1}, R_{i,t+1})$  est une hypothèse très forte.
- ▶ L'approche GMM n'exige, comme modèle, que des conditions de moment inconditionnel comme  $E[(1 + R_{it})M_t] = 1$ .
- ▶ Rappelons que dans le modèle CCAPM

$$M_{t+1} = \delta \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)},$$

et dans le cas spécial d'utilité isoélastique,

$$M_{t+1} = \delta \left( \frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma}.$$

- ▶ La *fonction de moment*  $(1 + R_{it})M_t$  est une fonction et des données et des paramètres inconnus.
- ▶ Avec GMM, on peut utiliser les données pour évaluer la théorie et apprendre les détails comme les valeurs des paramètres.

## Moments conditionnels et inconditionnels

- ▶ La version conditionnelle de la condition de moment:

$$E_t[(1 + R_{i,t+1})M_{t+1}] = 1.$$

- ▶ La version inconditionnelle de la condition de moment:

$$E[(1 + R_{i,t+1})M_{t+1}] = 1.$$

- ▶ Problème : la version inconditionnelle est beaucoup moins forte
  - ▶ moins d'information pertinente pour estimer les paramètres
  - ▶ moins d'implications falsifiables, dans un contexte de test
- ▶ Solution : si la version conditionnelle tient et un instrument  $Z_t$  est observé à chaque période  $t$ ,

$$\begin{aligned} E[(1 + R_{i,t+1})M_{t+1}Z_t] &= E[E_t[(1 + R_{i,t+1})M_{t+1}Z_t]] \\ &= E[Z_t E_t[(1 + R_{i,t+1})M_{t+1}]] \\ &= E[Z_t] \end{aligned}$$

- ▶ Alors la condition  $E[((1 + R_{i,t+1})M_{t+1} - 1)Z_t] = 0$  est une *autre* condition de moment inconditionnelle.

# Éléments de la GMM

- ▶ Une série de vecteurs aléatoires (données) :  $w_t$  ( $J \times 1$  à chaque période  $t$ , observé en  $T$  périodes)
- ▶ Vecteur de paramètres :  $\theta_0$  ( $P \times 1$ )
- ▶ Fonction de moment :  $g(w_t, \theta_0)$  ( $Q \times 1$ )
- ▶ Condition de moment de la population :  $E[g(w_t, \theta_0)] = 0$
- ▶ Le choix de  $g(\cdot, \cdot)$  est la spécification d'un modèle.
- ▶ Remarquez que l'hypothèse  $E[g(w_t, \theta_0)] = 0$  est moins forte que la spécification d'une loi paramétrique pour  $w_t$ .
  - ▶ Par exemple  $E[(y_i - x_i\beta)x_i] = 0$  versus  $y_i = x_i\beta + u_i$ ,  $u_i|x_i \sim N(0, \sigma^2)$ .

## Exemple CCAPM 1 : $w_t$

- ▶ Vecteur de variables aléatoires :

$$w_t = (C_t, C_{t+1}, R_{t+1}, Z_t)$$

- ▶  $C_t$  est la consommation agrégée ( $1 \times 1$ ).
- ▶  $R_{t+1}$  est un vecteur  $N \times 1$  de rendements nets.
- ▶  $Z_t$  est un vecteur  $K \times 1$  de variables exogènes, ou instruments, connu à  $t$ .
- ▶ Par exemple,

$$Z_t = (1, C_t/C_{t-1}, C_{t-1}/C_{t-2}, R_t, R_{t-1}).$$

## Exemple CCAPM 2 : $\theta_0$

- ▶ Vecteur de paramètres :

$$\theta_0 = (\delta_0, \gamma_0)$$

- ▶  $\delta_0$  et  $\gamma_0$  sont des “vraies” valeurs des paramètres d'utilité isoélastique :

$$V = E \left[ \sum_{\tau=0}^{\infty} \delta_0^\tau \frac{C_\tau^{1-\gamma_0}}{1-\gamma_0} \right]$$

## Exemple CCAPM 3 : $g(w_t, \theta_0)$

- ▶ Fonction de moment :

$$g(w_t, \theta_0) = [(1 + R_{t+1})\delta_0(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma_0} - \iota] \otimes Z_t$$

- ▶  $\iota$  est un vecteur  $N \times 1$  de 1.
- ▶  $\otimes$  est l'opération de produit Kronecker.
- ▶  $[\dots]$  est  $N \times 1$ ,  $Z_t$  est  $K \times 1$  donc le produit Kronecker est  $NK \times 1$ .
- ▶ Un élément de  $g(w_t, \theta_0)$  pour chaque combinaison d'actif et d'instrument.

## Exemple CCAPM 4 : Condition de moment de la population

- ▶ Condition de moment de la population :

$$E[g(w_t, \theta_0)] = 0.$$

- ▶ Selon le modèle, pour chaque instrument  $k$  et chaque actif  $i$ ,

$$\begin{aligned} & E[((1 + R_{i,t+1})\delta_0(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma_0} - 1) \cdot Z_{kt}] \\ &= E[E_t[((1 + R_{i,t+1})\delta_0(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma_0} - 1) \cdot Z_{kt}]] \\ &= E[E_t[((1 + R_{i,t+1})\delta_0(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma_0} - 1)]Z_{kt}] \\ &= E[0 \cdot Z_{kt}] = 0 \end{aligned}$$

- ▶ Donc les conditions de moment sont entraînées par la théorie.

## Identification et suridentification

- ▶ Dans cet exemple,  $Q = N \times K$  (dimension de  $g$ ) et  $P = 2$  (dimension de  $\theta_0$ )
- ▶ Si  $Q \geq P$  et les instruments sont valides, le système est identifié.
- ▶ Si  $Q > P$ , le système est sur-identifié.

## La condition de moment de l'échantillon

- ▶ Correspondant à  $E[g(w_t, \theta_0)]$ , la condition de moment de la population, il y a une condition de moment de l'échantillon :

$$g_T(w, \theta) \equiv \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g(w_t, \theta)$$

- ▶  $w \equiv (w_1, \dots, w_T)$ .
- ▶ Comme  $g(w_t, \theta)$ ,  $g_T(w, \theta)$  est  $Q \times 1$ .
- ▶ Intuition pour GMM :
  - ▶ Si le modèle est vrai, il devrait y avoir une valeur du paramètre  $\theta$  pour laquelle  $g_T(w, \theta)$  est près de zéro.
  - ▶ Une estimation GMM est la valeur  $\theta$  pour laquelle  $g_T(w, \theta)$  est le plus près de zéro, selon un critère donné.
  - ▶  $g_T(w, \theta)$  étant un vecteur, il faut choisir une distance à zéro.
  - ▶ On peut évaluer le modèle par la proximité minimale de  $g_T(w, \theta)$  à zéro.

## L'estimation GMM

- ▶ L'estimation GMM (méthode de moments généralisée) est la valeur  $\hat{\theta}_{GMM}$  qui minimise

$$Q_T(\theta) = g_T(w, \theta)' W_T g_T(w, \theta), \quad (3)$$

où  $W_T$  est une matrice  $Q \times Q$  définie positive.

- ▶  $W_T = I_Q$  (matrice d'identité) donne la somme des carrés.
- ▶ Une condition nécessaire pour une solution  $\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} Q_T(\theta)$  est

$$2G_T(\theta)' W_T g_T(w, \theta) = 0, \quad (4)$$

où

$$G_T(w, \theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial g_T(w_t, \theta)}{\partial \theta'}.$$

- ▶ On peut minimiser  $Q_T$  dans (3) ou résoudre (4).

## Le choix de $W_T$ , la matrice de pondération

- ▶ La théorie de GMM dit que la  $W_T$  optimale est

$$W_T = S^{-1},$$

où

$$S = \text{avar}[T^{1/2}g_T(w, \theta_0)].$$

- ▶ Notez que  $S$  dépend de  $\theta_0$ , qui est inconnu.
- ▶ L'estimation de  $\theta$  dépend de  $W_T$ .
- ▶ Cette situation mène à une approche itérative.

## Estimation de $\theta$ à plusieurs étapes

- ▶ Commencez avec  $W_T = I_Q$ .
- ▶ Plus robuste mais un peu plus difficile : commencez avec une matrice diagonale avec les précisions de l'échantillon des éléments de  $g_T(w, \theta)$ .
- ▶ Pour calculer ce dernier, on peut choisir des valeurs raisonnables de  $\theta$  ( $\delta = 0.99$  et  $\gamma = 3.0$ , par exemple).
- ▶ Itérez sur les étapes suivantes :
  - ▶ Calculer  $\hat{\theta}$  par minimisation ou la solution de (4).
  - ▶ Calculer

$$\hat{S}(w, \hat{\theta}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g(w_t, \hat{\theta})g(w_t, \hat{\theta})'$$

- ▶ Arrêtez quand (par exemple)  $\max |\hat{\theta}^K - \hat{\theta}^{K-1}| < \epsilon$ .
- ▶ Pour  $\gamma \approx 3$ ,  $\delta \approx 1$ ,  $\epsilon = 10^{-4}$  est raisonnable.

# Propriétés Asymptotiques

- ▶ Si  $g(w_t, \theta)$  est stationnaire et ergodique et  $W_T$  est définie positive,
  - ▶  $\hat{\theta} \rightarrow \theta_0$  en probabilité et
  - ▶  $T^{1/2}(\hat{\theta} - \theta_0)$  converge en loi à  $N(0, (G'S^{-1}G)^{-1})$ .
- ▶ Avec la matrice  $2 \times 2$  de covariance asymptotique  $(G'S^{-1}G)^{-1}$ , reportez les écarts types (racines carrées des éléments diagonaux)