

ECN 6578A, Économétrie des marchés financiers,  
Hiver 2023

Cours 5

William McCausland

2023-02-10

# Plan

1. La fonction de vraisemblance : exemples bernoullien, poissonien
2. Maximisation de vraisemblance : exemples simples
3. Maximum de vraisemblance : propriétés (un peu de théorie)
4. Le modèle EGARCH
5. Estimation des modèles GARCH, quelques résultats

# Éléments de l'analyse maximum de vraisemblance

- ▶ Quantités pertinentes :
  - ▶  $\theta$ , un vecteur de paramètres inconnus,
  - ▶  $y = (y_1, \dots, y_T)$ , un vecteur aléatoire des variables observables,
  - ▶  $y^\circ$ , le vecteur observé.
- ▶ Fonctions pertinentes :
  - ▶  $f(y|\theta)$ , la densité conditionnelle des données (modèle),
  - ▶  $\mathcal{L}(\theta; y) = f(y|\theta)$ , la vraisemblance,
  - ▶  $\mathcal{L}(\theta; y^\circ) = f(y^\circ|\theta)$ , la vraisemblance réalisée.

## Le modèle Bernoulli

- ▶ Supposons que les  $y_i$  sont iid Bernoulli avec probabilité  $\theta \in [0, 1]$  :

$$\begin{aligned}f(y_i|\theta) &= \begin{cases} \theta & y_i = 1 \\ (1 - \theta) & y_i = 0 \end{cases} \\ &= \theta^{y_i}(1 - \theta)^{1-y_i}\end{aligned}$$

- ▶ On observe  $y = (y_1, \dots, y_n)$  ; la fonction de masse de probabilité est

$$f(y|\theta) = \prod_{i=1}^n f(y_i|\theta) = \prod_{i=1}^n \theta^{y_i}(1 - \theta)^{1-y_i} = \theta^{n_1}(1 - \theta)^{n_0},$$

où

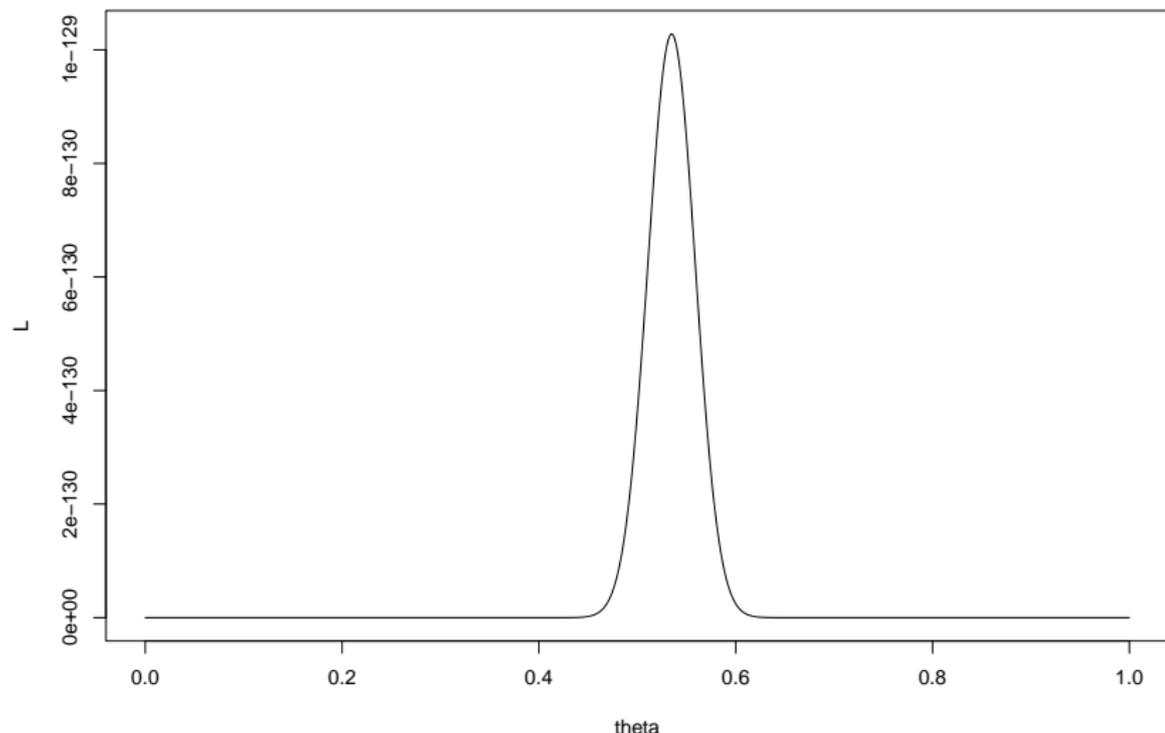
- ▶  $n_1 = \sum_{i=1}^n y_i$  est le nombre de fois qu'on observe 1, et
- ▶  $n_0 = n - \sum_{i=1}^n y_i$  est le nombre de fois qu'on observe 0.

## Deux interprétations de la même expression

- ▶ Deux façons de dénoter la même expression :
  - ▶ Fonction de masse de probabilité  $f(y|\theta) = \theta^{n_1}(1 - \theta)^{n_0}$ .
  - ▶ Fonction de vraisemblance  $\mathcal{L}(\theta; y) = \theta^{n_1}(1 - \theta)^{n_0}$ .
- ▶  $f(y|\theta)$  donne, pour  $\theta$  fixe, les probabilités relatives de plusieurs séquences  $(y_1, \dots, y_n)$ .
- ▶  $\mathcal{L}(\theta; y)$  donne, pour  $y$  fixe (le vecteur des données observées) une note (ou évaluation) à chaque valeur  $\theta$  pour la qualité de sa prévision des données observées.
- ▶ Soit  $L(\theta; y) = \log \mathcal{L}(\theta; y)$ , la log-vraisemblance.

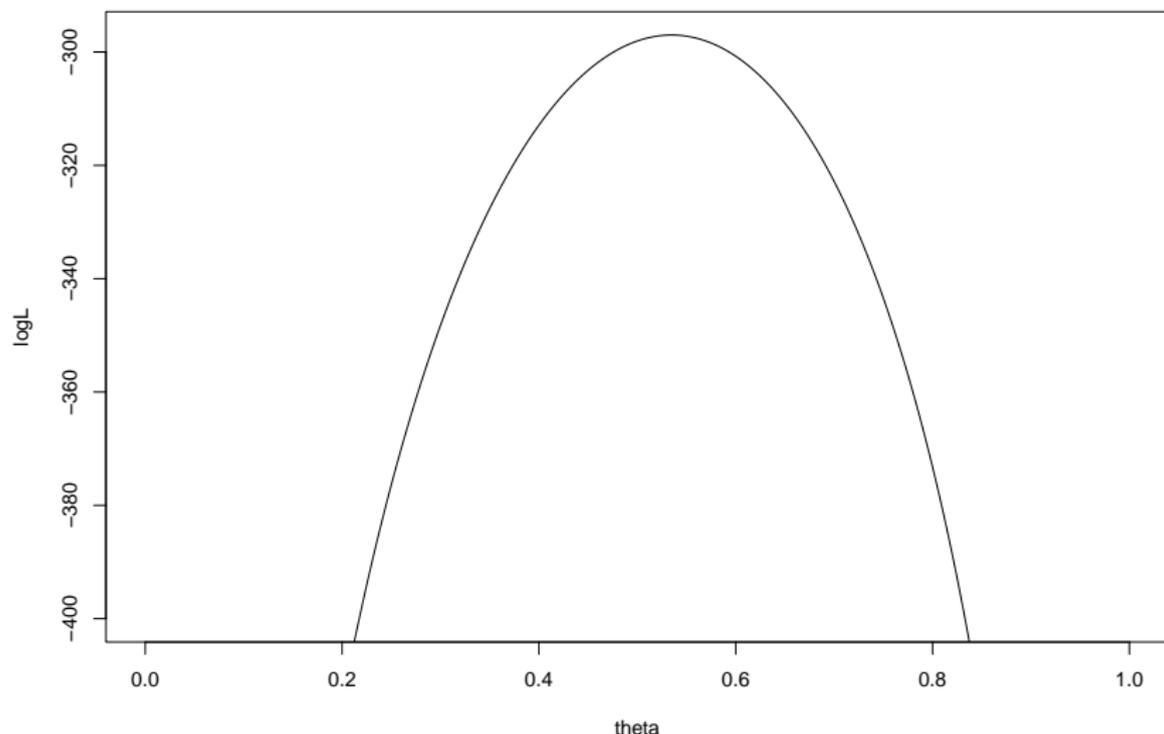
## La vraisemblance Bernoulli pour $n_0 = 200$ , $n_1 = 230$

```
n_0 = 200; n_1 = 230; theta = seq(0, 1, by=0.001)  
L = theta^n_1 * (1-theta)^n_0  
plot(theta, L, type='l')
```



## La log vraisemblance Bernoulli pour $n_0 = 200$ , $n_1 = 230$

```
logL = n_1 * log(theta) + n_0 * log(1-theta)
plot(theta, logL, type='l', ylim=c(-400, max(logL)))
```



## Le modèle poissonien

- ▶ Supposez que les  $y_i$  sont iid Poisson avec moyenne  $\theta > 0$ .
- ▶ La fonction de masse de probabilité de  $y_i$  est

$$f(y_i|\theta) = e^{-\theta} \frac{\theta^{y_i}}{y_i!}.$$

- ▶ On observe le vecteur aléatoire  $y = (y_1, \dots, y_n)$  ; la fonction de masse de probabilité de  $y$  est

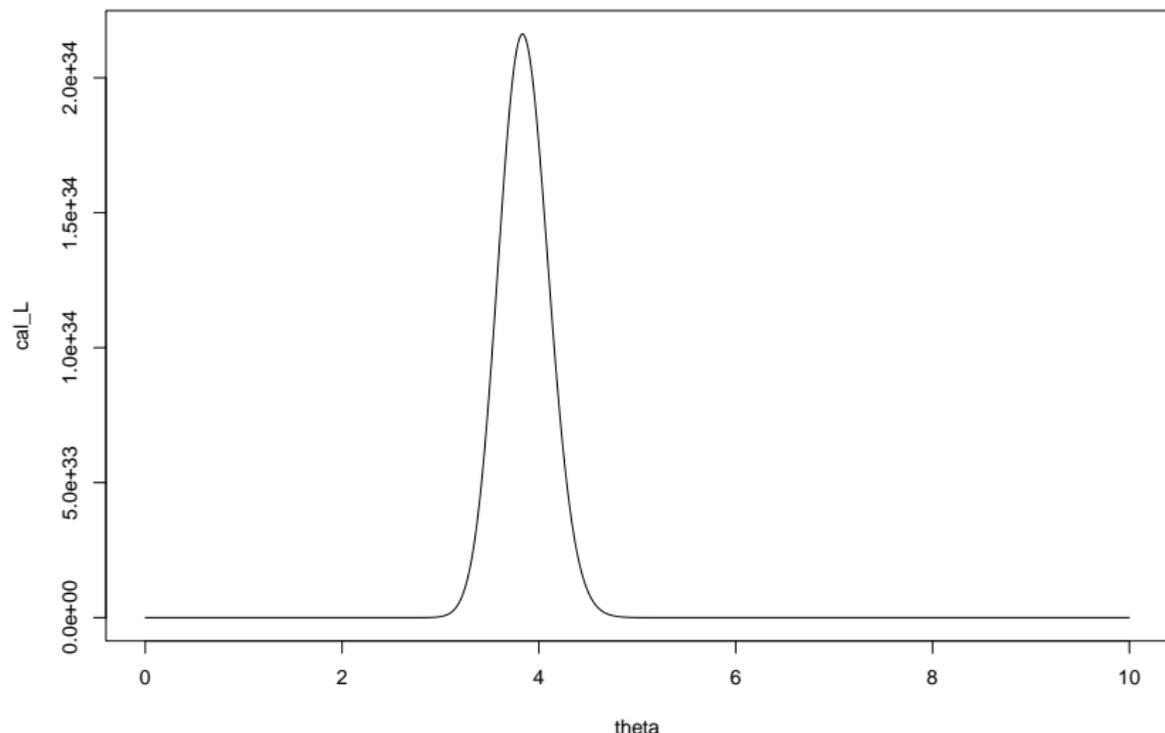
$$f(y|\theta) = \prod_{i=1}^n f(y_i|\theta) = \prod_{i=1}^n e^{-\theta} \frac{\theta^{y_i}}{y_i!} = \left[ \prod_{i=1}^n \frac{1}{y_i!} \right] e^{-n\theta} \theta^{\sum_{i=1}^n y_i}.$$

- ▶ Pour simplifier un facteur qui importe peu,

$$c \equiv \left[ \prod_{i=1}^n \frac{1}{y_i!} \right].$$

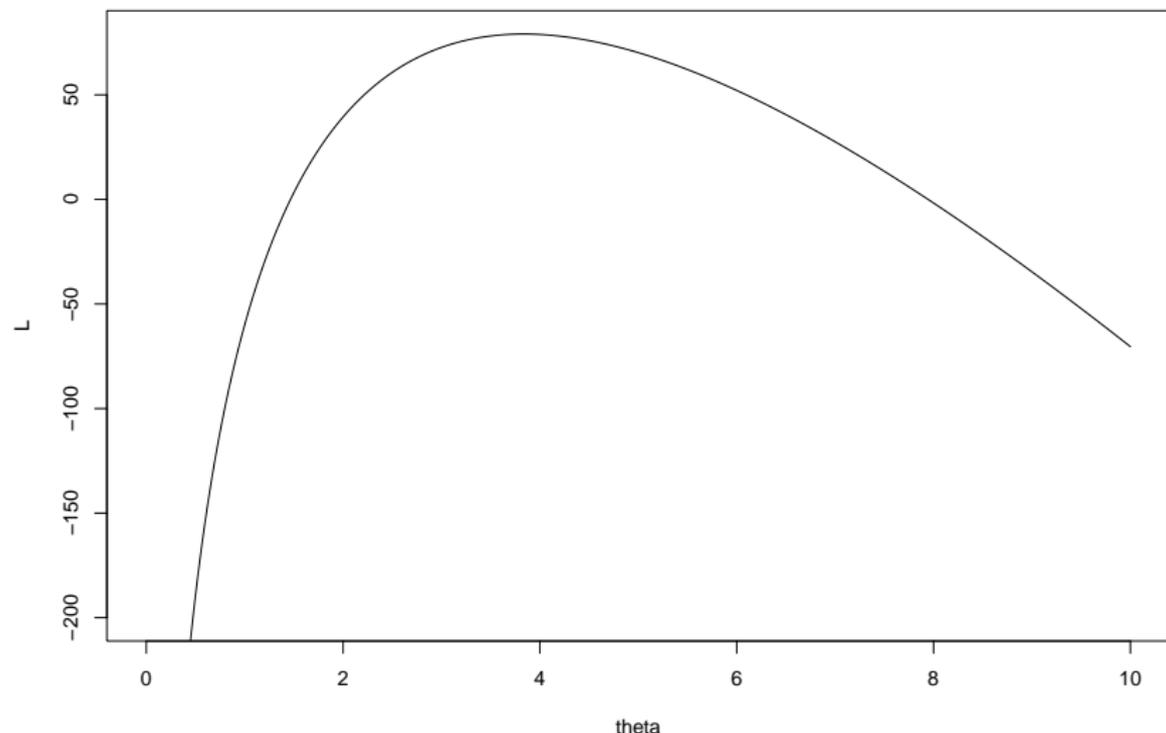
## Vraisemblance poissonienne pour $n = 60$ , $\sum_{i=1}^n y_i = 230$

```
n = 60; somme_y = 230; theta = seq(0, 10, by=0.001)
cal_L = exp(-n*theta) * theta^somme_y
plot(theta, cal_L, type='l')
```



Log vraisemblance poissonienne,  $n = 60$ ,  $\sum_{i=1}^n y_i = 230$

```
L = -n*theta + somme_y*log(theta)
plot(theta, L, type='l', ylim=c(-200, max(L)))
```



# La fonction de vraisemblance pour une séries chronologique

- ▶ La vraisemblance en général pour un modèle qui donne la densité  $f(r_1, \dots, r_T, \theta)$ .

$$\mathcal{L}(\theta; r) = f(r_1|\theta)f(r_2|r_1, \theta) \cdots f(r_T|r_1, \dots, r_{T-1}, \theta)$$

- ▶ Chaque densité  $f(r_t|r_1, \dots, r_{t-1}, \theta)$  est un genre de prévision conditionnelle de  $r_t$  sachant  $r_1, \dots, r_{t-1}$  et  $\theta$ .
- ▶ La log vraisemblance est

$$L(\theta; r) = \sum_{t=1}^T \log f(r_t|r_1, \dots, r_{t-1}, \theta).$$

- ▶ Pourquoi la log-vraisemblance et non juste la vraisemblance?
  - ▶ Pas de dépassement ou sous-passement numérique (overflow/underflow)
  - ▶ Plus facile à maximiser (la dérivée d'une somme est la somme des dérivées, la log-vraisemblance est plus souvent concave)

## Exemple : évaluation de la log vraisemblance GARCH(1,1)

- ▶ Rappel :  $L(\theta; r) = \sum_{t=1}^T f(r_t | r_1, \dots, r_{t-1}, \theta)$ .
- ▶ Juste avant l'itération  $t$ , la valeur  $\sigma_t^2$  est disponible.
- ▶ À l'itération  $t$ ,

1. On calcule le terme  $\log f(r_t | r_1, \dots, r_{t-1}, \theta)$  de la log vraisemblance. Dans le cas gaussien,

$$\log f(r_t | r_1, \dots, r_{t-1}, \theta) = -\frac{1}{2}(\log 2\pi + \log \sigma_t^2) - \frac{1}{2}r_t^2/\sigma_t^2.$$

et plus en général,

$$\log f(r_t | r_1, \dots, r_{t-1}, \theta) = -\log \sigma_t + \log f_\epsilon(r_t/\sigma_t | \theta),$$

où  $f_\epsilon(\epsilon | \theta)$  et la densité des  $\epsilon_t$ .

2. On calcule la valeur  $\sigma_{t+1}^2$  :

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2.$$

# Maximum de la vraisemblance Bernoulli

- ▶ Vraisemblance :  $\mathcal{L}(\theta; y) = \theta^{n_1}(1 - \theta)^{n_0}$ .
- ▶ Log vraisemblance :  $L(\theta; y) = n_1 \log(\theta) + n_0 \log(1 - \theta)$
- ▶ Deux dérivées de la log vraisemblance :

$$\frac{\partial L(\theta; y)}{\partial \theta} = \frac{n_1}{\theta} - \frac{n_0}{1 - \theta}$$

$$\frac{\partial^2 L(\theta; y)}{\partial \theta^2} = -\frac{n_1}{\theta^2} - \frac{n_0}{(1 - \theta)^2} < 0.$$

- ▶ La valeur qui maximise la vraisemblance et la log-vraisemblance est

$$\hat{\theta} = \frac{n_1}{n_0 + n_1} = \frac{n_1}{n}.$$

## Maximum de la vraisemblance poissonienne

- ▶ Vraisemblance :  $\mathcal{L}(\theta; y) = ce^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^n y_i}$ .
- ▶ Log vraisemblance :  $L(\theta; y) = \log c - n\theta + (\sum_{i=1}^n y_i) \log \theta$ .
- ▶ Deux dérivées de la log vraisemblance :

$$\frac{\partial L(\theta; y)}{\partial \theta} = -n + \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\theta}$$

$$\frac{\partial^2 L(\theta; y)}{\partial \theta^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\theta^2} < 0.$$

- ▶ La valeur  $\hat{\theta}$  (souvent vue comme une variable aléatoire) qui maximise la vraisemblance et la log-vraisemblance est

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

- ▶ Pour  $n = 60$  et  $\sum_{i=1}^n y_i = 230$ ,  $\hat{\theta} = \frac{23}{6} \approx 3.833$ .

# Maximum de vraisemblance : conditions de régularité

- ▶ Définitions :
  - ▶  $\theta$  est le vecteur des paramètres ;  $\Theta$ , l'ensemble de toutes les valeurs possibles de  $\theta$ .
  - ▶  $r$  est le vecteur (aléatoire) des données.
- ▶ Conditions informelles de régularité :
  1. Le modèle est correct pour une valeur  $\theta = \theta_0 \in \Theta$ .
  2. La vraie valeur  $\theta_0$  est dans l'intérieur de  $\Theta$ .
  3. Identification :

$$\theta \neq \theta_0 \Rightarrow f(\cdot|\theta) \neq f(\cdot|\theta_0).$$

4.  $L(\theta; r) \equiv \log f(r|\theta)$  a toujours un maximum global unique.
5. Le gradient de  $L(\theta; r)$  est toujours borné.
6. La matrice  $\mathcal{I}(\theta)$  suivante (matrice d'information de Fisher) est définie positive:

$$\mathcal{I}(\theta) = E_{r|\theta} \left[ \frac{\partial L(\theta; r)}{\partial \theta^\top} \frac{\partial L(\theta; r)}{\partial \theta} \right].$$

## Maximum de vraisemblance : résultats

Résultats : (Soit  $\hat{\theta} \equiv \arg \max_{\theta} L(\theta; r)$ , qui existe et est unique.)

1.  $\hat{\theta} \rightarrow_p \theta_0$  (loi de grands nombres)
2.  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \rightarrow_d N(0, \mathcal{I}(\theta_0)^{-1})$  (théorème central limite)
3.  $E_{r|\theta} \left[ \frac{\partial L(\theta; r)}{\partial \theta} \right] = 0$ , alors  $\mathcal{I}(\theta) = \text{Var}_{r|\theta} \left[ \frac{\partial L(\theta; r)}{\partial \theta} \right]$ .
4.  $\mathcal{I}(\theta) = E_{r|\theta} \left[ -\frac{\partial^2 L(\theta; r)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right]$ .

Problèmes restants :

1. Il faut trouver  $\hat{\theta}$ .
2. La variance asymptotique  $\mathcal{I}(\theta_0)^{-1}$  dépend de  $\theta_0$ , qui est inconnu.
3. L'espérance dans l'expression de  $\mathcal{I}(\theta)$  est difficile à évaluer analytiquement.

## Exemple Bernoulli

- ▶ Un cas rare où les calculs analytiques sont faisables.
- ▶ La moyenne du score :

$$E_{y|\theta} \left[ \frac{\partial L}{\partial \theta} \right] = E_{y|\theta} \left[ \frac{n_1}{\theta} - \frac{n_0}{(1-\theta)} \right] = \frac{n\theta}{\theta} - \frac{n(1-\theta)}{(1-\theta)} = 0$$

- ▶ La matrice d'information de Fisher :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\theta) &= E_{y|\theta} \left[ -\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \right] = E_{y|\theta} \left[ \frac{n_1}{\theta^2} + \frac{n_0}{(1-\theta)^2} \right] \\ &= \frac{n\theta}{\theta^2} + \frac{n(1-\theta)}{(1-\theta)^2} = \frac{n}{\theta(1-\theta)}. \end{aligned}$$

- ▶ La variance de  $\hat{\theta}$  (exacte, pas asymptotique) :

$$\text{Var}[\hat{\theta}] = \text{Var} \left[ \frac{n_1}{n} \right] = \frac{1}{n^2} n \text{Var}[y_i] = \frac{1}{n} (\theta - \theta^2) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

## Exemple poissonien

- ▶ Un autre cas rare où les calculs analytiques sont faisables.
- ▶ La matrice d'information de Fisher : ( $E[y_i] = \theta$ ,  $\text{Var}[y_i] = \theta$ )

$$\mathcal{I}(\theta) = E_{y|\theta} \left[ -\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \right] = E_{y|\theta} \left[ \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\theta^2} \right] = \frac{n\theta}{\theta^2} = \frac{n}{\theta}.$$

- ▶ La variance de  $\hat{\theta}$  (exacte, pas asymptotique) :

$$\text{Var}[\hat{\theta}] = \text{Var} \left[ \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \right] = \frac{1}{n^2} n \text{Var}[y_i] = \frac{\theta}{n}.$$

- ▶ Pour  $n = 60$  et  $\sum_{i=1}^n y_i = 230$ ,  $\text{Var}[\hat{\theta}]$  est de  $(0.2528)^2$  pour  $\theta = \hat{\theta} \approx 3.833$ ,  $(0.2236)^2$  pour  $\theta = 3$  et  $(0.2739)^2$  pour  $\theta = 4.5$ .

## Comment trouver $\hat{\theta}$ !

- ▶ Gradient (score) et hessienne de la log-vraisemblance :

$$s(\theta) \equiv \frac{\partial L(\theta; r)}{\partial \theta^\top}, \quad H(\theta) \equiv \frac{\partial^2 L(\theta; r)}{\partial \theta \partial \theta^\top}.$$

- ▶ On utilise un processus séquentiel pour trouver  $\hat{\theta} : \theta_1, \theta_2, \dots$ ,
- ▶ Expansion quadratique de Taylor autour de  $\theta_k$  :

$$\tilde{L}(\theta; r) = L(\theta_k; r) + s(\theta_k)^\top (\theta - \theta_k) + \frac{1}{2} (\theta - \theta_k)^\top H(\theta_k) (\theta - \theta_k).$$

- ▶ Le gradient  $\tilde{s}(\theta)$  de  $\tilde{L}(\theta; r)$  :

$$\tilde{s}(\theta) = s(\theta_k) + H(\theta_k)(\theta - \theta_k)$$

- ▶ La condition  $\tilde{s}(\theta_{k+1}) = 0$  définit la mise à jour  $\theta_{k+1}$  de la méthode Newton :

$$\theta_{k+1} = \theta_k - H(\theta_k)^{-1} s(\theta_k).$$

## Comment trouver $\hat{\theta}$ II

- ▶ Problème de non-convergence si la forme de la log vraisemblance est loin de quadratique et négative définie.
- ▶ Une recherche linéaire est plus robuste : choisir une valeur scalaire  $\lambda_k$  et calculer

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \lambda_k H(\theta_k)^{-1} s(\theta_k).$$

1. Calculez  $s(\theta_k)$ ,  $H(\theta_k)$ .
2. Trouvez une bonne valeur de  $\lambda_k$  (recherche linéaire)

- ▶ Des fois, on utilise souvent, au lieu de  $H(\theta)$ , une approximation

$$\hat{H}(\theta) = - \sum_{t=1}^T \frac{\partial \log f(r_t | r_1, \dots, r_{t-1}, \theta)}{\partial \theta^\top} \frac{\partial \log f(r_t | r_1, \dots, r_{t-1}, \theta)}{\partial \theta}.$$

- ▶ Une loi de grands nombres donne

$$\hat{H}(\theta_0) \rightarrow_p E[s(\theta_0)s(\theta_0)^\top] = \mathcal{I}(\theta_0) = -E[H(\theta_0)].$$

## Approximation de $\mathcal{I}(\theta_0)$

- ▶ Rappelons que  $\mathcal{I}(\theta_0)^{-1}$  est la variance asymptotique de l'estimateur MV.
- ▶ Cependant,  $\theta_0$  et  $\mathcal{I}(\theta_0)$  sont inconnus.
- ▶ On utilise  $-H(\hat{\theta})$  ou  $-\hat{H}(\hat{\theta})$  au lieu de  $\mathcal{I}(\theta_0)$ , qui est inconnu.
- ▶ Heureusement, on a
  - ▶ Convergence de  $\hat{\theta}$  à  $\theta_0$ .
  - ▶ Convergence de  $-\hat{H}(\theta_0)$  ou  $-H(\theta_0)$  à  $\mathcal{I}(\theta_0) = E[-H(\theta_0)]$ .
  - ▶ Ensemble : convergence de  $-H(\hat{\theta})$  ou  $-\hat{H}(\hat{\theta})$  à  $\mathcal{I}(\theta_0)$ .

# Le modèle EGARCH

Le modèle EGARCH(1,1) :

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \quad \ln \sigma_t^2 = \alpha \ln \sigma_{t-1}^2 + (1 - \alpha) \alpha_0 + g(\epsilon_{t-1}) \quad \epsilon_t \sim \text{iid}(0, 1),$$

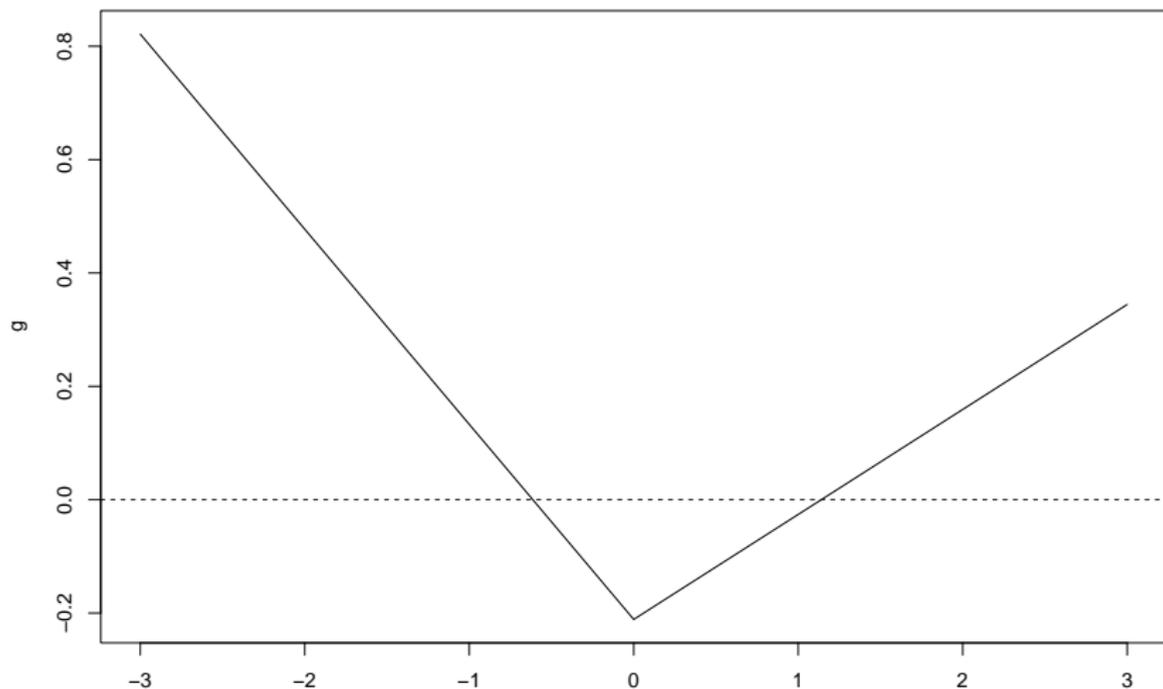
où  $g(\epsilon) = \theta \epsilon + \gamma [|\epsilon| - E[|\epsilon|]]$ .

Notes :

- ▶  $E[\epsilon_t] = 0$ ,  $E[|\epsilon_t| - E[|\epsilon_t|]] = 0$ ,  $E[g(\epsilon_t)] = 0$ .
- ▶ Par exemple, si  $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ ,  $E[|\epsilon_t|] = \sqrt{2/\pi}$
- ▶  $\ln \sigma_t^2$  est un processus AR(1), puisque  $g(\epsilon_t)$  est un bruit blanc.
- ▶ Pour  $\theta < 0$ , il y a un effet de levier.
- ▶ Pas besoin de contraintes sur les coefficients pour assurer la positivité de la volatilité, grâce à la spécification logarithmique.

## La fonction $g(\epsilon)$ de l'équation (3.31) (un exemple)

```
eps = seq(-3, 3, by=0.01)
theta = -0.0795; gamma = 0.2647
g = theta * eps + gamma * (abs(eps) - sqrt(2/pi))
plot(eps, g, type='l'); abline(h=0, lty=2)
```



## Ajustement de plusieurs modèles GARCH (code)

```
library(fGarch)
# Séries IBM journalière, log rendements 1962-97
r = scan('d-ibmln.txt')

# GARCH(1, 1) gaussien
gn = garchFit(~garch(1,1), cond.dist='norm', data=r)

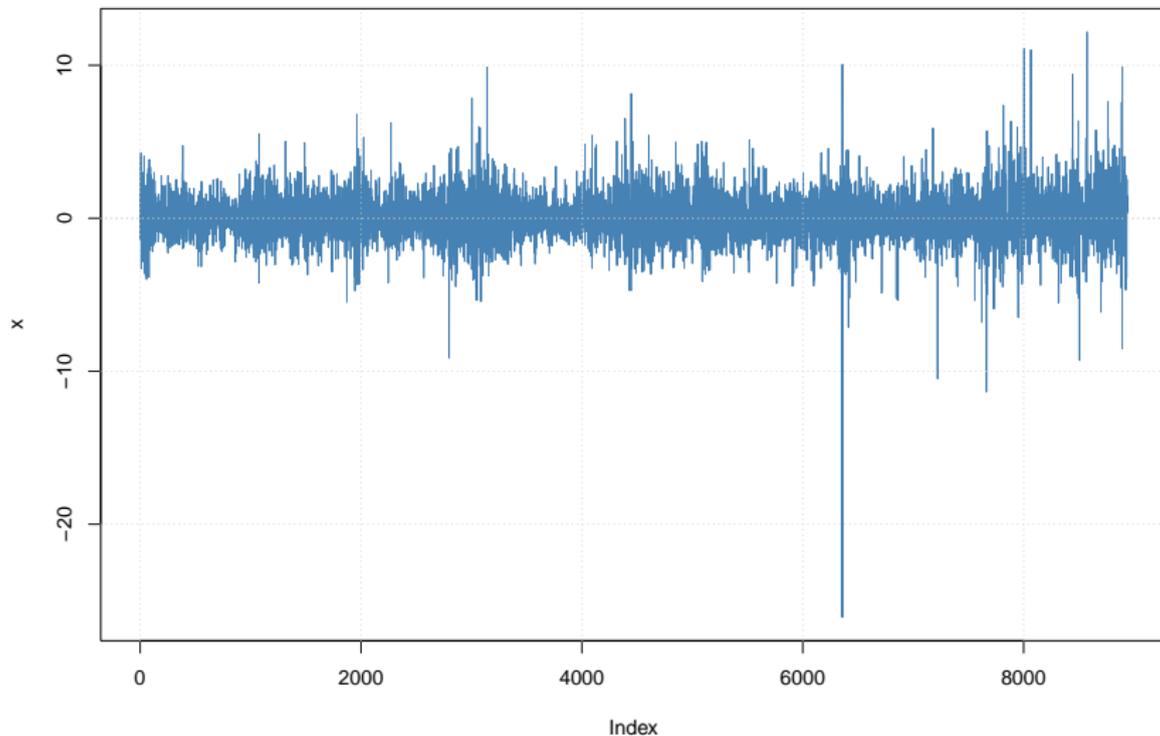
# mu_t : ARMA(1, 0), sigma_t : GARCH(1, 1) gaussien
agn = garchFit(~arma(1,0)+garch(1,1), cond.dist='norm', data=r)

# GARCH(1, 1) t de Student
gt = garchFit(~garch(1,1), cond.dist='std', data=r)
```

# Données IBM journalière, $r_t$

```
plot(gn, which=1)
```

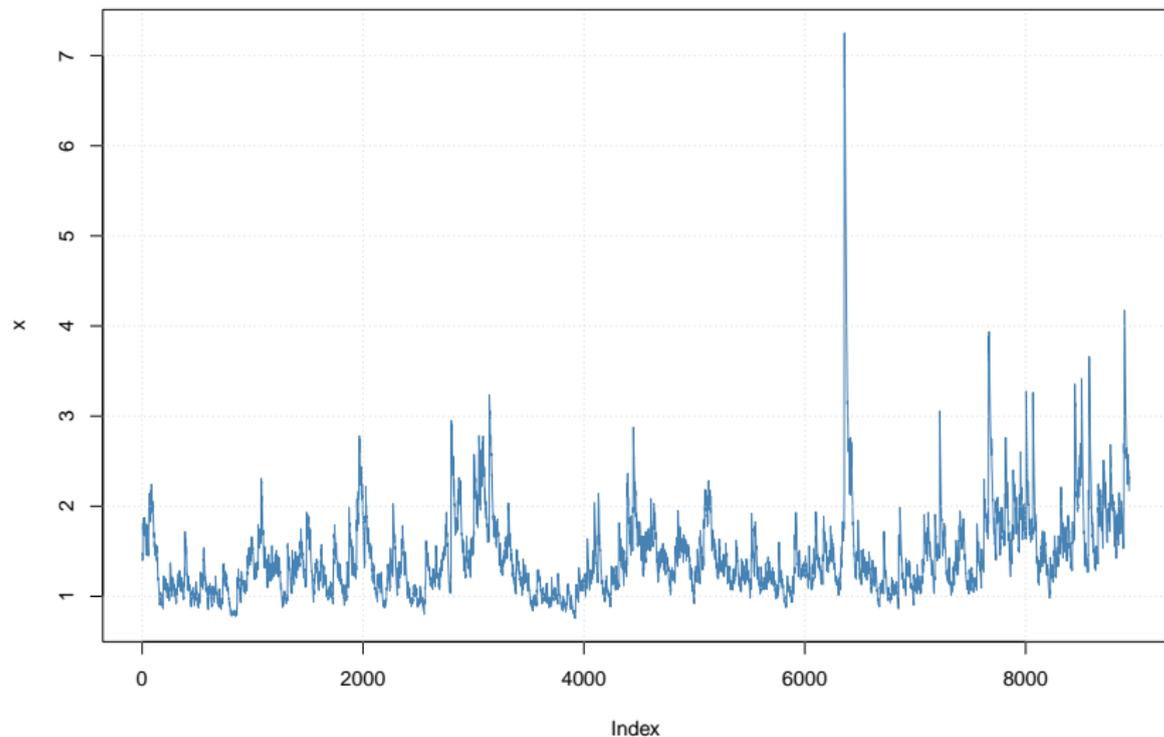
Time Series



# GARCH(1,1) gaussian, $\hat{\sigma}_t$

```
plot(gn, which=2)
```

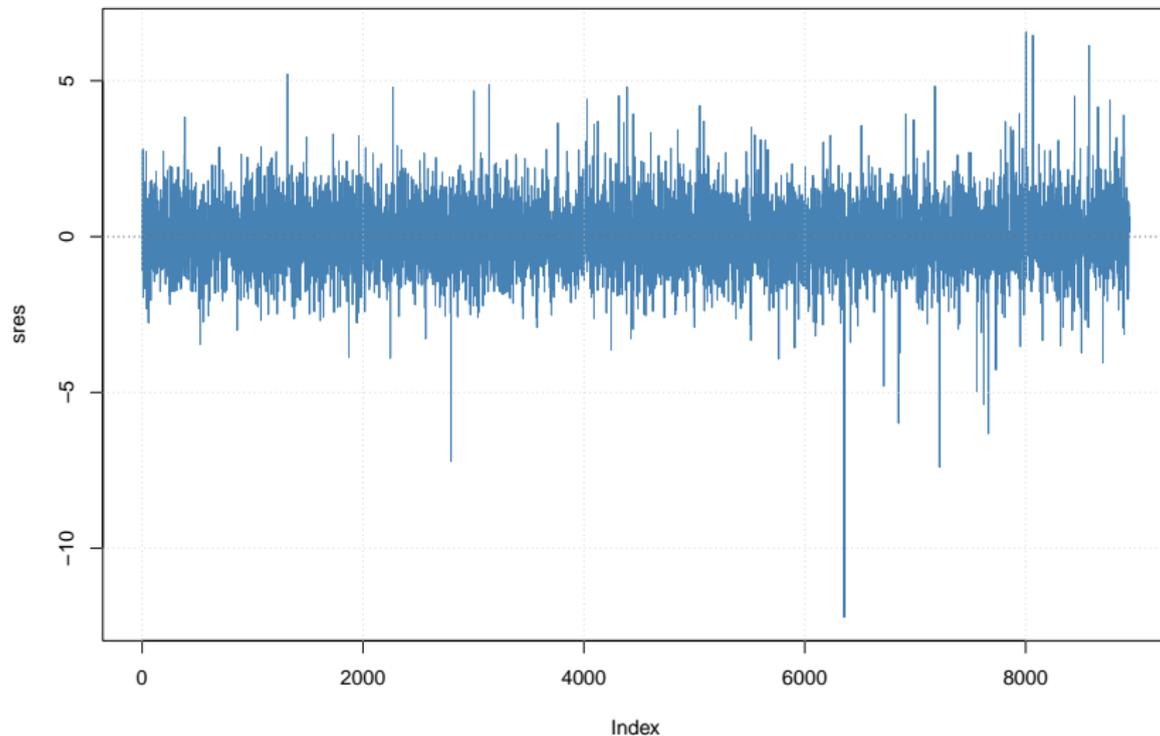
Conditional SD



# GARCH(1,1) gaussian, $\hat{\epsilon}_t$

```
plot(gn, which=9)
```

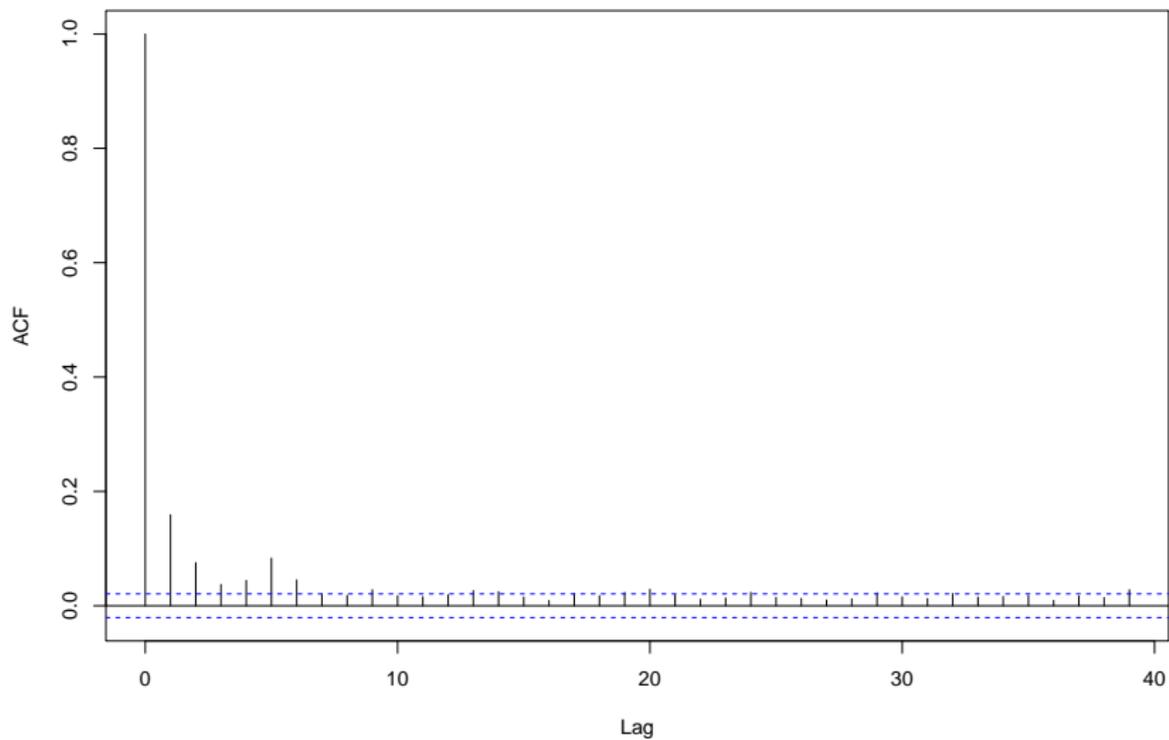
Standardized Residuals



$ACF(r_t^2)$

acf(r^2)

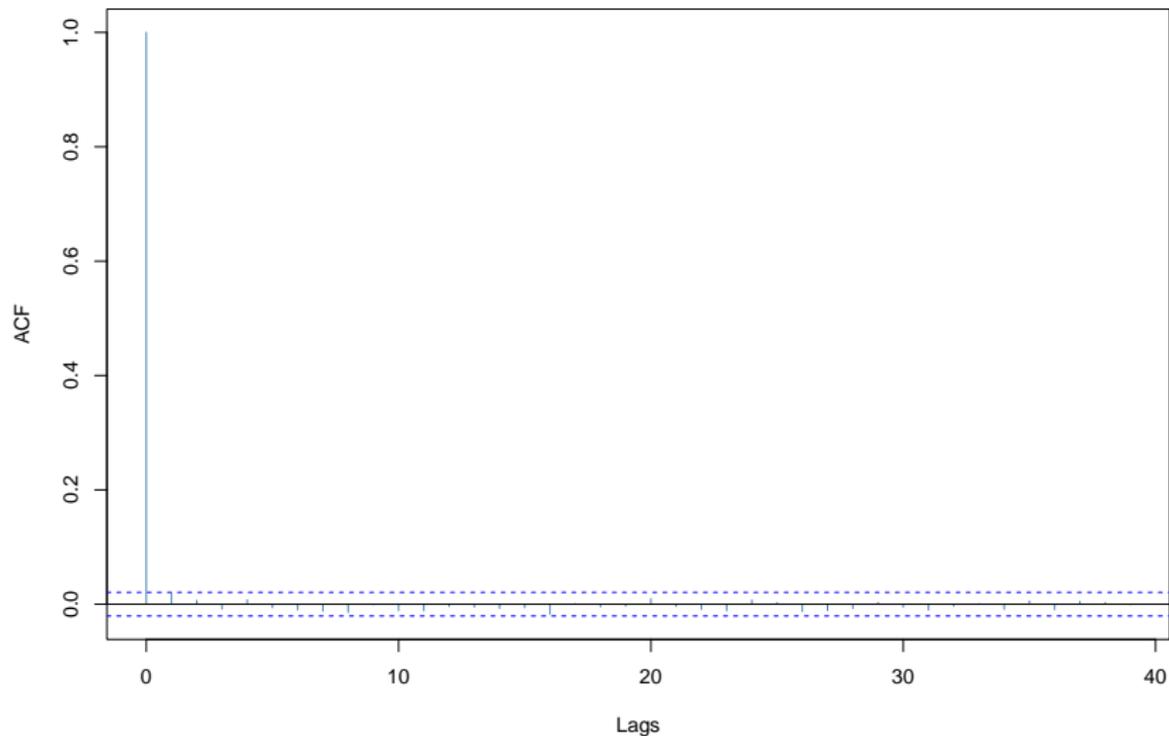
Series r^2



# GARCH(1,1) gaussien, $ACF(\hat{\epsilon}_t^2)$

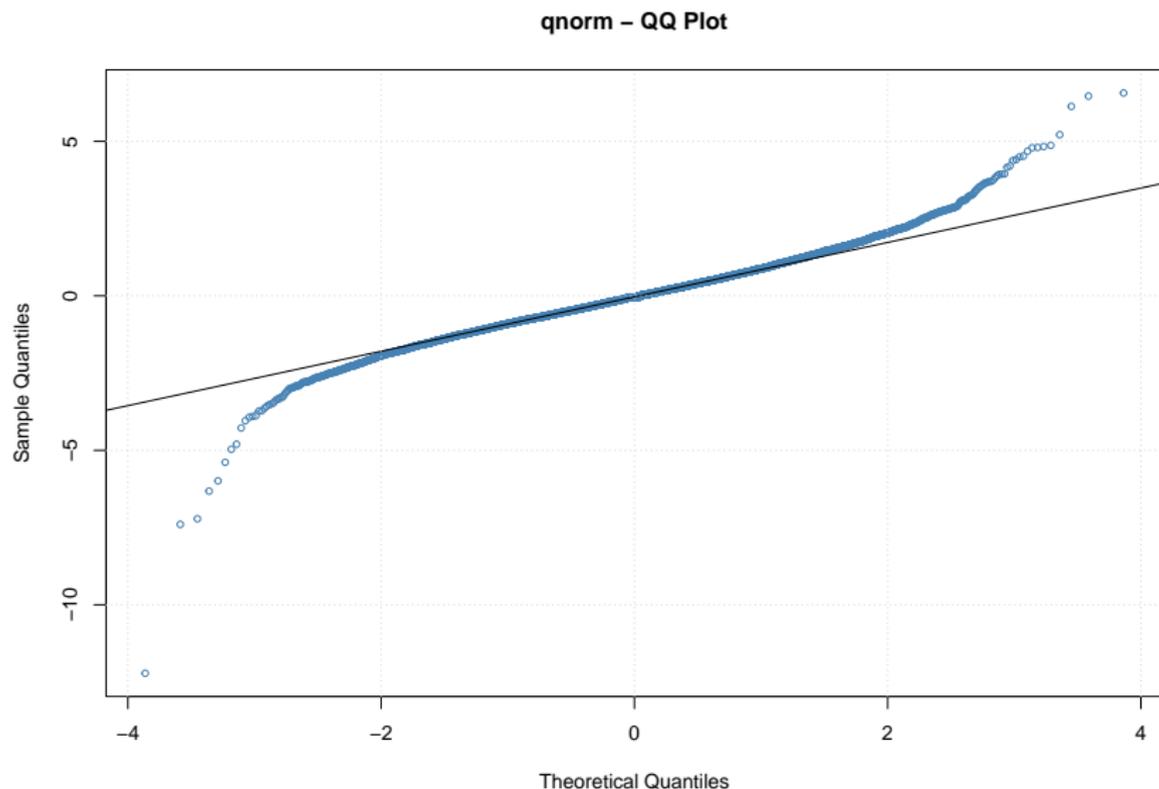
```
plot(gn, which=11)
```

ACF of Squared Standardized Residuals



# GARCH(1,1) gaussien, graphique Q-Q pour $\hat{\epsilon}_t$

```
plot(gn, which=13)
```



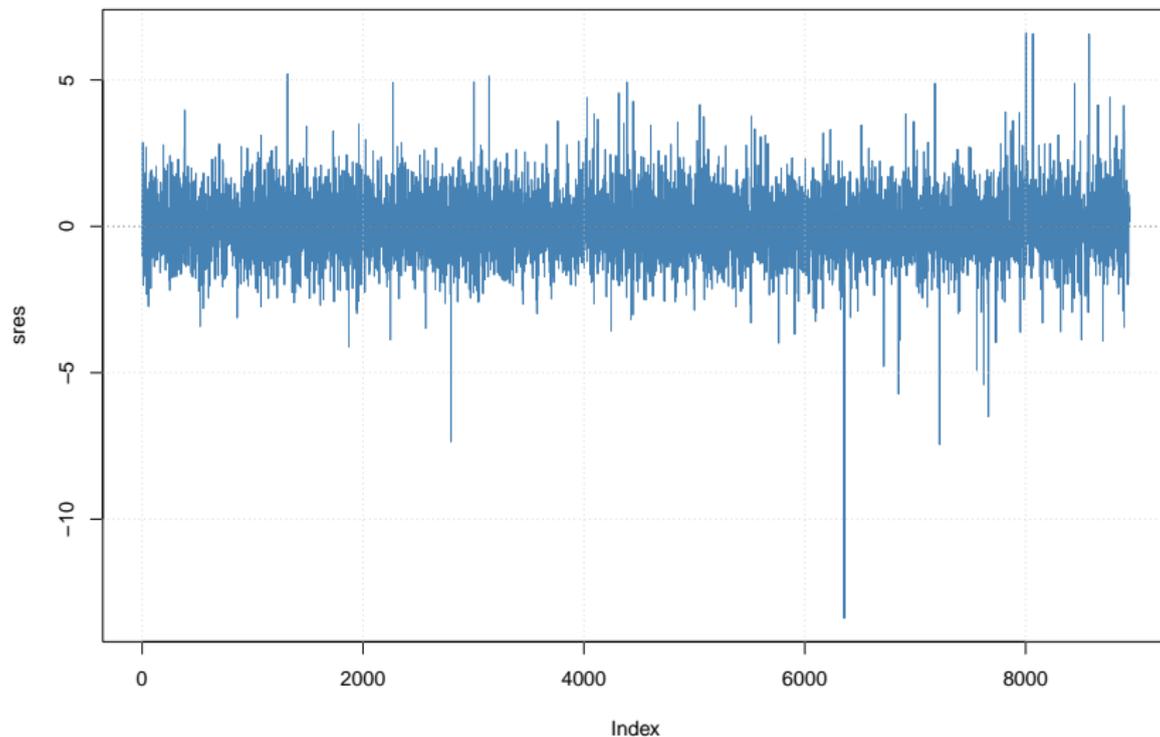
## GARCH(1,1) gaussien, sommaire des résultats

- ▶ Le modèle capture bien l'autodépendance de volatilité.
- ▶ Le modèle capture mal l'asymétrie et surtout l'aplatissement conditionnel.

# GARCH(1,1) $t$ de Student, $\hat{\epsilon}_t$

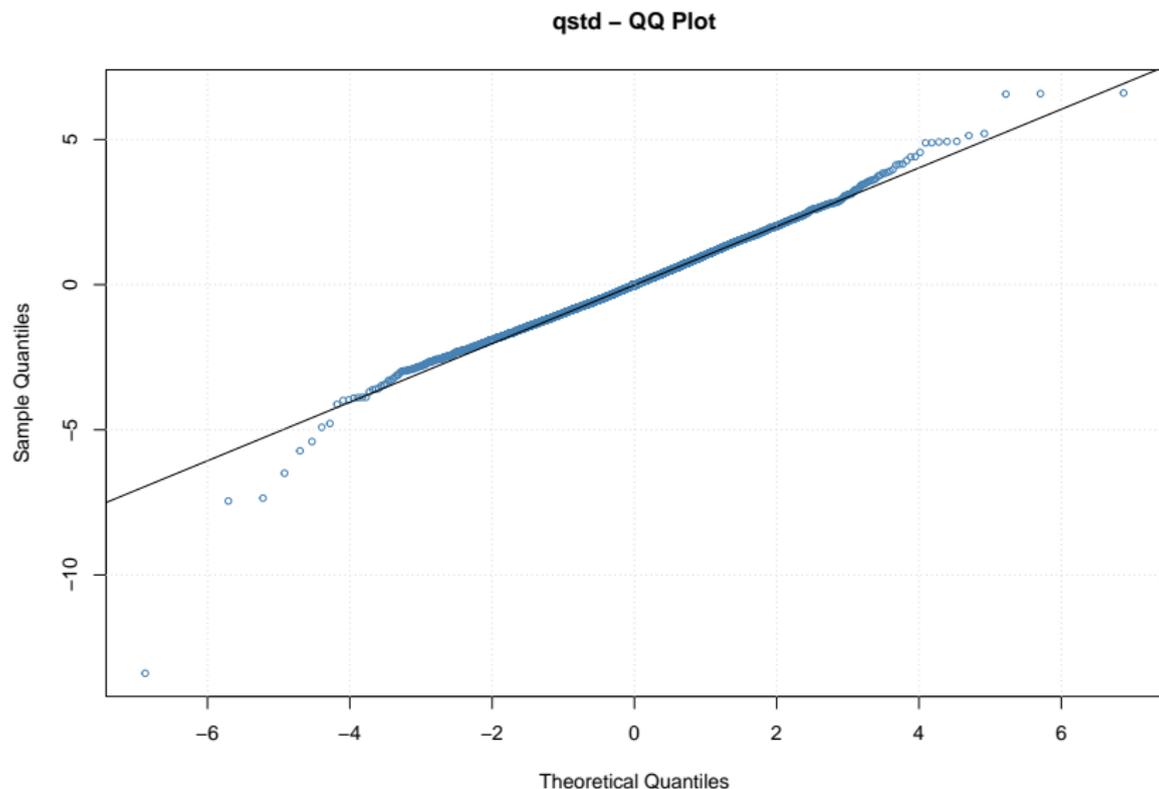
```
plot(gt, which=9)
```

Standardized Residuals



# GARCH(1,1) $t$ de Student, graphique Q-Q pour $\hat{\epsilon}_t$

```
plot(gt, which=13)
```



## GARCH(1,1) $t$ de Student, sommaire des résultats

- ▶ Le modèle capture mieux l'aplatissement conditionnel que le modèle GARCH(1,1) gaussien,
- ▶ mais pas parfaitement :
  - ▶ le modèle ne capture pas bien les (mettons) 10 valeurs les plus extrêmes (sur  $\approx 9000$ )
  - ▶ il y a plus de valeurs extrêmes que prévu par le modèle (mauvaise spécification de l'évolution de la variance conditionnelle  $\sigma_t$  ou de la loi conditionnelle ou des deux?)
- ▶ Une asymétrie : les valeurs extrêmes négatives sont particulièrement extrêmes.

# Cours 6, la semaine prochaine

## Plan préliminaire

1. Un modèle de volatilité stochastique
2. Inférence bayésienne : un peu de théorie
3. Inférence bayésienne : un peu de computation