ECN 6578A, Économétrie des marchés financiers, Hiver 2023

Cours 3

William McCausland

2023-02-13

Plan

1. Comment spécifier un processus ARMA(p,q).
2. Comment trouver la fonction d'autocorrélation d'un processus ARMA(p,q).
3. Comment estimer les paramètres d'un processus ARMA(p,q).
4. Comment selectionner les ordres d'un processus ARMA(p,q).

Commentaires préliminaires

1. On focalise ici sur les processus covariance-stationnaires r_t.
2. Tous les moments d'ordre un et deux de r_t se trouvent dans la moyenne μ et la fonction d'autocovariance γ_k, $k = 0, 1, \ldots$.
3. Spécification alternative : moyenne μ, variance σ^2 et fonction d'autocorrélation ρ_k, $k = 1, 2, \ldots$, avec $\sigma^2 = \gamma_0$, $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$.
4. On peut trouver les moments d'ordre un et deux de toutes les fonctions linéaires des r_t si on connait μ, γ_k, $k = 1, \ldots$.
5. Un processus gaussien est complètement spécifié par ces moments d'ordre un et deux.
6. Il est très utile de définir un processus r_t en termes d'une transformation d'un bruit blanc a_t telle que la valeur r_t dépend seulement du passé $(r_{t-1}, a_{t-1}, r_{t-2}, a_{t-2}, \ldots)$ et *l'innovation* a_t, non-corrélé avec les valeurs passées.
7. Pour aujourd'hui, la notation a_t signifie toujours un bruit blanc et on suppose que r_t est toujours un processus covariance-stationnaire.

Modèle AR(1) : spécification

- Supposons que $|\phi| < 1$.

AR(1) avec moyenne zéro, expressions équivalentes:

- $r_t = \phi r_{t-1} + a_t$
- $(1 - \phi B) r_t = a_t$
- $r_t = (1 - \phi B)^{-1} a_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} \phi^\tau B^\tau a_t$:
  - $r_t = \phi r_{t-1} + a_t = \phi(\phi r_{t-2} + a_{t-1}) + a_t = a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 r_{t-2}$.
  - remplace r_{t-2} par $\phi r_{t-3} + a_{t-2}$ pour obtenir $r_t = a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 a_{t-2} + \phi^3 r_{t-3}$, etc.
  - $r_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} \phi^\tau a_{t-\tau}$.

AR(1) avec moyenne μ, expressions équivalentes:

- $(1 - \phi B)(r_t - \mu) = a_t$
- $r_t = (1 - \phi)\mu + \phi r_{t-1} + a_t$
- $r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t$, si $\phi_0 = (1 - \phi)\mu$ et $\phi_1 = \phi$.

Modèle AR(1) : Calcul de la fonction d'autocovariance I

- Supposons que $\mu = 0$, ϕ et $\sigma_a^2 \equiv \mathrm{Var}[a_t]$ sont donnés, $|\phi| < 1$.

Équations Yule-Walker pour trouver γ_0, γ_1

- Multipliez $r_t = \phi r_{t-1} + a_t$ par r_t, r_{t-1} et prenez les espérances :

$$E[r_t^2] = \phi E[r_t r_{t-1}] + E[r_t a_t] \quad \text{ou} \quad \gamma_0 = \phi\gamma_1 + \sigma_a^2,$$

$$E[r_{t-1} r_t] = \phi E[r_{t-1}^2] + E[r_{t-1} a_t] \quad \text{ou} \quad \gamma_1 = \phi\gamma_0.$$

- La solution est $\gamma_0 = \sigma_a^2/(1-\phi^2)$, $\gamma_1 = \phi\sigma_a^2/(1-\phi^2)$.

Récursion pour trouver γ_k, $k > 1$

- Pour $k > 1$,

$$\gamma_k = E[r_t r_{t-k}] = E[(\phi r_{t-1} + a_t) r_{t-k}] = \phi\gamma_{k-1}.$$

Modèle AR(1) : Calcul de la fonction d'autocovariance II

- Avec la solution des équations Y-W et la récursion, on obtient la fonction d'autocovariance

$$\gamma_k = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi^2}\,\phi^k,$$

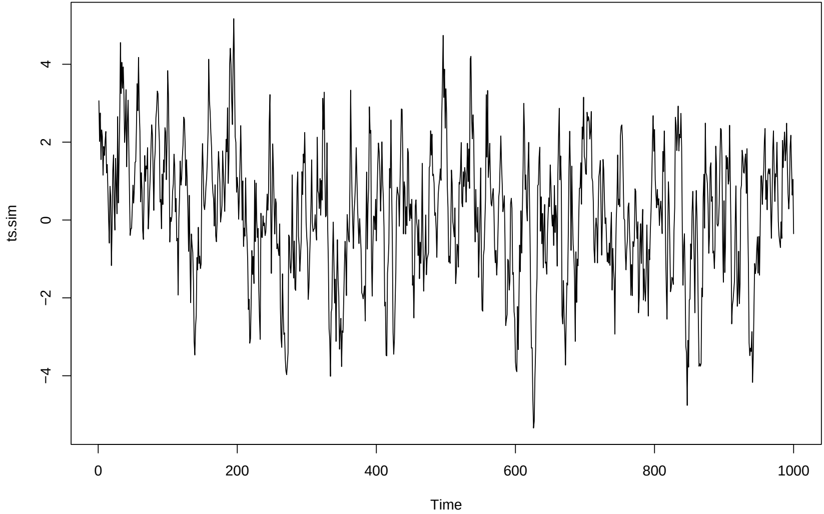
  et la fonction d'autocorrélation

$$\rho_k = \phi^k.$$

- La fonction d'autocorrélation diminue à un taux exponentiel.
- La valeur ϕ^{-1} est la racine du polynôme caracteristique $1-\phi x$, où x replace B dans l'expression $1-\phi B$.
- La stationnarité implique $|\phi|<1$ ou $|\phi^{-1}|>1$.

Modèle AR(1) : Simulation

```
ts.sim = arima.sim(n=1000, list(ar=0.8, sd=0.1))
ts.plot(ts.sim)
```



Introduction au modèle AR(2)

- Mettons que s_t est un AR(1) : $(1 - \omega_1 B)s_t = a_t$.
- Définissons r_t par $(1 - \omega_2 B)r_t = s_t$.
- Attention : r_t n'est pas un AR(1) parce que s_t n'est pas un bruit blanc.
- Notez que $(1 - \omega_1 B)(1 - \omega_2 B)r_t = a_t$.
- Autrement dit, $[1 - (\omega_1 + \omega_2)B + \omega_1\omega_2 B^2]r_t = a_t$.
- Alors r_t est un AR(2).
- Notez la symétrie $(1 - \omega_1 B)(1 - \omega_2 B) = (1 - \omega_2 B)(1 - \omega_1 B)$: l'ordre des opérations n'importe pas.

Modèle AR(2) avec moyenne zéro : spécification

Expressions équivalentes pour un AR(2):

$$(1-\omega_1 B)(1-\omega_2 B)r_t = a_t$$

$$[1-(\omega_1+\omega_2)B+\omega_1\omega_2 B^2]r_t = a_t$$

$$(1-\omega_2 B)(1-\omega_1 B)r_t = a_t$$

$$r_t = (\omega_1+\omega_2)r_{t-1} - \omega_1\omega_2 r_{t-2} + a_t$$

$$(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2)r_t = a_t, \text{ où } \phi_1 = \omega_1+\omega_2,\ \phi_2 = -\omega_1\omega_2$$

$$r_t = (1-\phi_1 B-\phi_2 B^2)^{-1} a_t$$

Notes

- Remarquez que $(1-\omega_1 x)(1-\omega_2 x) = 1-\phi_1 x-\phi_2 x^2$.
- Alors ω_1^{-1} et ω_2^{-1} sont les deux racines de $1-\phi_1 x-\phi_2 x^2$.

Racines du polynôme caractéristique et la stationnarité

- Les racines ω_1^{-1} et ω_2^{-1} sont réelles ou sont complèxes conjugées :

$$\omega_1^{-1} = a + bi, \qquad \omega_2^{-1} = a - bi,$$

  pour a et b réels.

- Dans les deux cas, la stationnarité implique $|\omega_1| < 1$ et $|\omega_2| < 1$
- Condition équivalente : $|\omega_1^{-1}| > 1$ et $|\omega_2^{-1}| > 1$.
- Si $(\omega_1^{-1}, \omega_2^{-1}) = a \pm bi$, $|\omega_1^{-1}| = |\omega_2^{-1}| = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$(\omega_1, \omega_2) = \frac{a \mp bi}{a^2 + b^2}.$$

Modèle AR(2) : Calcul de la fonction d'autocovariance I

Équations Yule-Walker pour trouver γ_0, γ_1, γ_2

- Multipliez $r_t = \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + a_t$ par r_t, r_{t-1}, r_{t-2} et prenez l'espérance:

$$E[r_t^2] = \phi_1 E[r_t r_{t-1}] + \phi_2 E[r_t r_{t-2}] + E[r_t a_t],$$

$$E[r_{t-1} r_t] = \phi_1 E[r_{t-1}^2] + \phi_2 E[r_{t-1} r_{t-2}] + E[r_{t-1} a_t],$$

$$E[r_{t-2} r_t] = \phi_1 E[r_{t-2} r_{t-1}] + \phi_2 E[r_{t-2}^2] + E[r_{t-2} a_t].$$

- En termes de γ_0, γ_1, γ_2,

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_a^2,$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1,$$

$$\gamma_2 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0.$$

- On trouve la solution γ_0, γ_1, γ_2 pour ϕ_1, ϕ_2 et σ_a^2 donnés.

Modèle AR(2) : Calcul de la fonction d'autocovariance II

Récursion pour trouver γ_k, $k > 2$

- Une récursion qui donne une équation de différence pour γ_k :

$$\begin{aligned}\gamma_k = E[r_t r_{t-k}] &= E[(\phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + a_t) r_{t-k}] \\ &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}.\end{aligned}$$

- La solution générale de cette équation de différence linéaire de 2e ordre est (pourvu que $\omega_1 \neq \omega_2$)

$$\gamma_k = c_1 \omega_1^k + c_2 \omega_2^k,$$

  où ω_1^{-1} et ω_2^{-1} sont les deux racines de $1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2$.
- On peut trouver c_1 et c_2 avec les valeurs initiales γ_0 et γ_1.
- Cette équation en forme réduite pour γ_k révèle les ailes de la fonction d'autocorrélation : $\gamma_k \approx c_i \omega_i^k$ pour i tel que ω_i est maximal.

Fonction d'autocovariance pour quelques processus AR(2)

1. $\omega_1 = \omega_2 = 0.4$:

$$(1 - 0.4B)(1 - 0.4B) = 1 - 0.8B + 0.16B^2.$$

2. $\omega_1 = -0.1$, $\omega_2 = 0.9$:

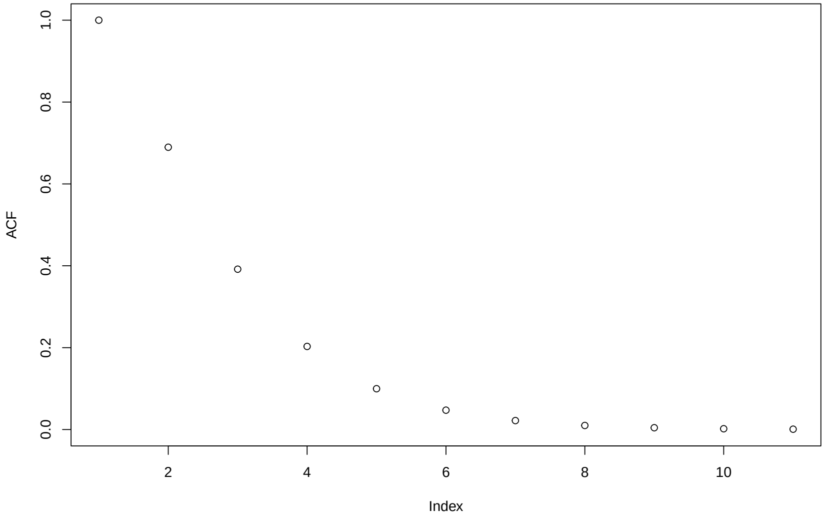
$$(1 + 0.1B)(1 - 0.9B) = 1 - 0.8B - 0.09B^2.$$

3. $\omega_1 = 0.4 + 0.5i$, $\omega_2 = 0.4 - 0.5i$:

$$(1 - (0.4 + 0.5i)B)(1 - (0.4 - 0.5i)B) = 1 - 0.8B + 0.41B^2.$$

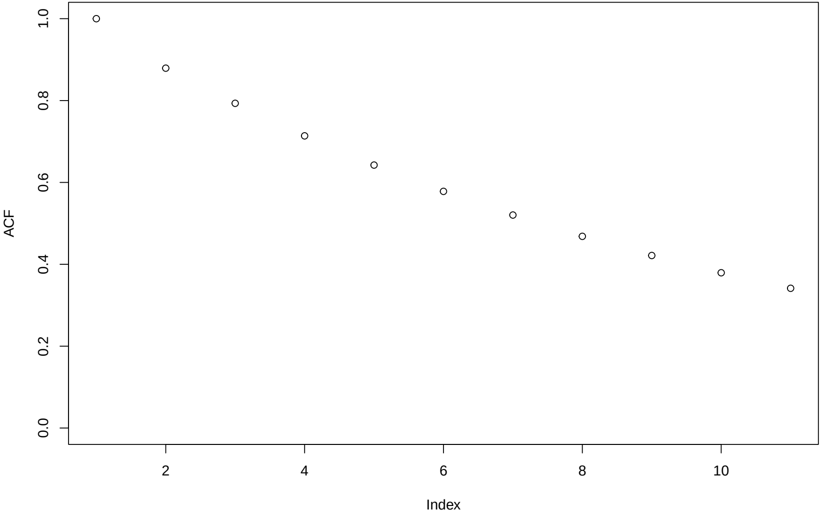
ACF pour $\omega_1 = \omega_2 = 0.4$

```
ACF = ARMAacf(ar = c(0.8, -0.16), lag.max=10)
plot(ACF, ylim=c(0, 1))
```



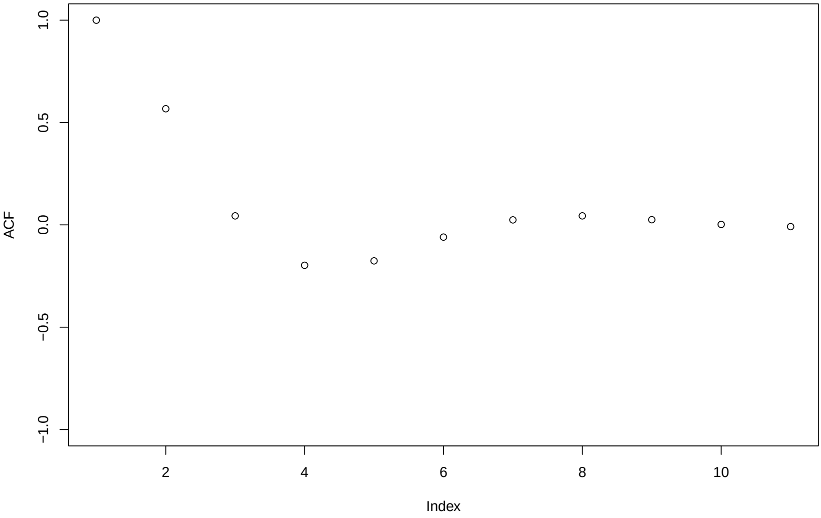
ACF pour $\omega_1 = -0.1$, $\omega_2 = 0.9$

```
ACF = ARMAacf(ar = c(0.8, 0.09), lag.max=10)
plot(ACF, ylim=c(0, 1))
```



ACF pour $\omega_1 = 0.4 + 0.5i$, $\omega_2 = 0.4 - 0.5i$

```
ACF = ARMAacf(ar = c(0.8, -0.41), lag.max=10)
plot(ACF, ylim=c(-1,1))
```



Extensions aux AR(p)

- Même approche pour trouver la fonction d'autocovariance :
  - $(p+1)$ équations linéaires Yule-Walker pour calculer les $(p+1)$ variables inconnues $\sigma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$ à partir de σ_a^2 et $\phi_1, \ldots, \phi_p$.
  - Une récursion donne γ_k en termes de $\gamma_{k-1}, \ldots, \gamma_{k-p}$, $k > p$.
- Si $\omega_1^{-1}, \ldots, \omega_p^{-1}$ sont les racines de $(1 - \phi_1 x - \ldots - \phi_p x^p)$,

$$(1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p) = (1 - \omega_1 B) \cdots (1 - \omega_p B),$$

- La stationnarité implique $|\omega_i^{-1}| > 1$ (ou $|\omega_i| < 1$), $i = 1, \ldots, p$.
- Si les ω_i sont distincts, la fonction d'autocovariance γ_k prend la forme

$$\gamma_k = c_1 \omega_1^k + \ldots + c_p \omega_p^k$$

  où on peut déterminer $c_1, \ldots, c_p$ avec $\gamma_0, \ldots, \gamma_p$.
- Une implication : la fonction d'autocorrélation d'un AR(p) diminue de taux exponentiel.
- Il peut y avoir des paires $(\omega_i, \omega_j) = a \pm bi$, mais les γ_k sont toujours réels.

ARMA(p,q) : 3 représentations

1. Représentation ARMA(p,q)

$$(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\dots\phi_p B^p)r_t = (1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\dots-\theta_q B^q)a_t.$$

$$\phi(B)r_t = \theta(B)a_t$$

2. Représentation MA infinie

$$\frac{\theta(B)}{\phi(B)} = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots \equiv \psi(B)$$

$$r_t = \psi(B)a_t$$

3. Représentation AR infinie (si le processus est inversible)

$$\frac{\phi(B)}{\theta(B)} = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots \equiv \pi(B)$$

$$\pi(B)r_t = a_t$$

Calcul de la fonction d'autocovariance d'un ARMA(p,q)

- L'équation ARMA:

$$r_t = \phi_1 r_{t-1} + \ldots \phi_p r_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

- Multiplie par r_{t-h} et prenez l'espérance:

$$\gamma_h = \phi_1 \gamma_{h-1} + \ldots + \phi_p \gamma_{h-p} - \theta_h E[a_{t-h} r_{t-h}] - \ldots - \theta_q E[a_{t-q} r_{t-h}]$$

- En utilisant la représentation MA infinie,

$$\gamma_h = \phi_1 \gamma_{h-1} + \ldots + \phi_p \gamma_{h-p} - \theta_h \psi_0 \sigma_a^2 - \ldots - \theta_q \psi_{q-h} \sigma_a^2$$

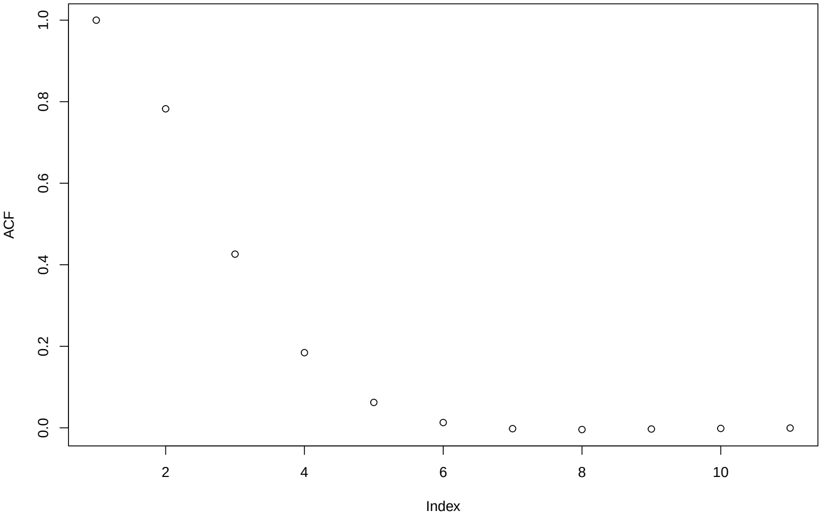
- Les équations pour $h = 0, 1, \ldots, p$ donnent $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$.
- Pour $h > \max(p, q)$, c'est comme un AR(p) :

$$\gamma_h = \phi_1 \gamma_{h-1} + \ldots + \phi_p \gamma_{h-p},$$

alors les racines du polynome caracteristique déterminent le taux de diminution de la ACF.

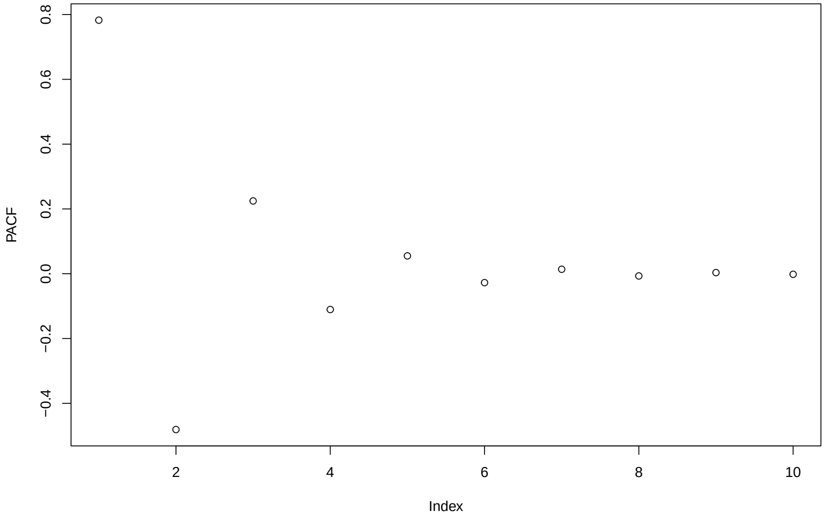
Exemple : ACF d'un processus ARMA(p,q)

```
ACF = ARMAacf(ar = c(0.8, -0.2), ma = c(0.5), 10)
plot(ACF)
```



Exemple : PACF d'un processus ARMA(p,q)

```
PACF = ARMAacf(ar = c(0.8, -0.2), ma = c(0.5), 10, pacf=TRU
plot(PACF)
```



Estimation des paramètres des modèles ARMA(p,q)

- Pour p et q donné, on veut
  - trouver les estimateurs $\hat{\phi}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\sigma}_a^2$ de $\phi = (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_p)$, $\theta = (\theta_1, \ldots \theta_q)$ et σ_a^2, pour un échantillon donné,
  - trouver la loi asymptotique des estimateurs.
- La méthode la plus courante : maximum de vraisemblance (MV) pour une vraisemblance gaussienne.
- Même si un ARMA(p,q) n'est pas gaussien, la loi asymptotique des estimateurs MV est pareille. (Un exemple de l'approche pseudo-maximum de vraisemblance)
- La théorie des lois asymptotiques des estimateurs MV et pseudo-MV est bien connue.
- En pratique, il faut, de façon efficace :
  - évaluer la fonction de vraisemblance,
  - maximiser cette fonction en se servant des évaluations.
- Les logiciels font tous le travail, mais il vaut la peine de comprendre ce qu'ils font.

Évaluation de la vraisemblance gaussienne I

- Attention: voici une façon directe mais *très* inefficace.
- Soit $r = (r_1, \ldots, r_T)$, un vecteur colonne.
- Si r est stationnaire et gaussien, sa densité est

$$f(r) = \frac{1}{(2\pi)^{T/2}} |\Gamma|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(r - \mu\iota)^T \Gamma^{-1} (r - \mu\iota) \right],$$

où $\mu = E[r_t]$,

$$\iota = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{T-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{T-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{T-1} & \gamma_{T-2} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix}.$$

- Pour évaluer la vraisemblance à $\phi_0, \phi_1, \ldots \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q$, σ_a^2 :
  - trouvez μ, $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{T-1}$ en fonction des coefficients, puis
  - évaluer l'expression $f(r)$ ci-haut.

Évaluation de la vraisemblance gaussienne II

- En pratique, cette façon directe d'évaluer la vraisemblance est très inefficace.
- Il y a des algorithmes pour évaluer la vraisemblance des ARMA(p,q) gaussiens.
- Remarquez par exemple que la vraisemblance d'un AR(1) est plus rapide à évaluer si on décompose la densité comme

$$
\begin{aligned}
f(r) = {} & \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2(1-\phi^2)^{-1}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(r_1-\mu)^2}{\sigma_a^2(1-\phi^2)^{-1}}\right] \\
& \times \prod_{t=2}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(r_t-\phi r_{t-1}-(1-\phi)\mu)^2}{\sigma_a^2}\right]
\end{aligned}
$$

- Le coût de computation ici est linéaire en T.
- Le coût de l'évaluation directe est quadratique en T.

Exemple en R de l'estimation des paramètres ARMA

```r
t=read.table('m-ibm3dx2608.txt', header=T)
arima(t$vwrtn, order=c(3,0,1))
```

```
##
## Call:
## arima(x = t$vwrtn, order = c(3, 0, 1))
##
## Coefficients:
##           ar1      ar2      ar3     ma1  intercept
##       -0.0073  -0.0040  -0.1091  0.1245     0.0089
## s.e.   0.1860   0.0382   0.0319  0.1855     0.0017
##
## sigma^2 estimated as 0.002874:  log likelihood = 1501.07
```

Sélection des ordres p et q d'un processus ARMA

- La vraisemblance maximale croit avec l'ajout d'un paramètre.
- On veut éviter le problème de surapprentissage (overfitting).
- Une façon de le faire est l'imposition d'un coût.
- Le critère AIC (Akaike Information Criterion) est

$$AIC(p,q) = -\frac{2}{T}\ln f(r;\hat{\phi},\hat{\theta},\hat{\sigma}_a^2) + \frac{2(p+q+1)}{T}.$$

- Le critère BIC (Bayesian Information Criterion) est

$$BIC(p,q) = -\frac{2}{T}\ln f(r;\hat{\phi},\hat{\theta},\hat{\sigma}_a^2) + \frac{(p+q+1)\ln T}{T}$$

- On choisit les ordres p et q qui minimisent AIC ou BIC.
- Si l'ARMA(p,q) est gaussien,

$$\hat{\sigma}_a^2 = -\frac{2}{T}\ln f(r;\hat{\phi},\hat{\theta},\hat{\sigma}_a^2).$$

  alors augmenter la vraisemblance, c'est réduire la variance estimée de l'innovation.

Cours 4, la semaine prochaine

Plan préliminaire

1. Prévision avec un ARMA(p,q)
2. Modèles d'héteroscédasticité conditionnelle autorégressive
3. Introduction à l'inférence bayésienne
4. Modèles de volatilité stochastique