ECN 6578A, Économétrie des marchés financiers, Hiver 2023

Cours 10

William McCausland

2023-03-26

Obligations

- Un obligation est un contrat entre un *émetter* (pays, province, état, municipalité, entreprise) et un *détenteur*.
- Le détenteur peut vendre l'obligation dans un marché.
- L'émetteur verse un paiement, la *valeur nominale* (face value) au détenteur à l'*échance*.
- Habituellement l'émetteur verse des *coupons* réguliers au détenteur jusqu'à l'échéance (inclusif).
- Pour les obligations *zéro coupon* il n'y a pas de coupon.
- P_{nt} est le prix à t d'une obligation zéro coupon qui paie un dollar dans n périodes et $p_{nt} \equiv \log(P_{nt})$.

Rendements des obligations

- Le rendement à l'échéance (yield) Y_{nt} de cette obligation vérifie

$$P_{nt} = \frac{1}{(1+Y_{nt})^n}.$$

- Le log-rendement $y_{nt} = \log(1+Y_{nt})$ vérifie

$$y_{nt} = -\frac{p_{nt}}{n}.$$

Rendements "Holding Period"

- On peut calculer un *rendement pendant la période de détention* (holding period return) pour une obligation :

$$(1 + R_{n,t+1}) = \frac{P_{n-1,t+1}}{P_{nt}} = \frac{(1 + Y_{nt})^n}{(1 + Y_{n-1,t+1})^{n-1}}.$$

- En logarithmes,

$$r_{n,t+1} = p_{n-1,t+1} - p_{nt} = y_{nt} - (n-1)(y_{n-1,t+1} - y_{nt}).$$

- Le rendement à l'échéance (connu à t) est la moyenne de rendements à venir :

$$y_{nt} = -p_{nt}/n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} r_{n-i,t+1+i}.$$

- Attention : si les taux d'intérêt montent, le prix des obligations tombe.

La structure à terme

- La *structure à terme* est l'ensemble de rendements à l'échéance pour des obligations zéro coupon de maturité différentes.
- La courbe de rendement (yield curve) est la graphique de Y_{nt} ou y_{nt} contre n.
- L'écart de rendement (yield spread) à t est $S_{nt} \equiv Y_{nt} - Y_{1t}$ ou $s_{nt} \equiv y_{nt} - y_{1t}$.

Courbe de rendement actuel, il y a un an, il y a deux ans

US Treasury Yield Curve (updated daily)

Updated: 03/24/2023

Bookmark Print Tweet

1-month yield	4.228%
1-year yield	4.301%
2-year yield	3.767%
10-year yield	3.372%
30-year yield	3.644%

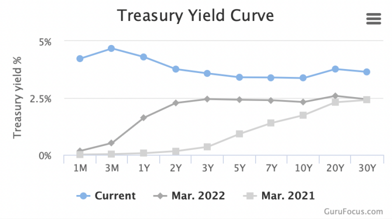

Figure 1: Source: gurufocus.com

Cours à terme (forward rates)

- Voici une façon de garantir à t un taux d'intérêt entre $t+n$ et $t+n+1$ (le taux étant déterminé par les prix marchands).
  - acheter une obligation qui paie un dollar à $t+n+1$
  - vendre assez de l'obligation qui paie un dollar à $t+n$ pour financer cet achat. (c.-à-d. vendre une quantité $P_{n+1,t}/P_{nt}$) de cette obligation)
- Le *cours à terme* (forward rate) est le taux garanti :

$$1 + F_{nt} = \frac{P_{nt}}{P_{n+1,t}}.$$

Modèles de la structure à terme

- Rappel : P_{nt} le prix à t d'une obligation zéro coupon, qui paie 1 dollar à $t+n$.
- $P_{nt} = E_t[P_{n-1,t+1} M_{t+1}]$ où M_{t+1} est le facteur d'actualisation stochastique.
- L'itération donne $P_{nt} = E_t[M_{t+1} M_{t+2} \cdots M_{t+n}]$:
  - $E_t[E_{t+1}[P_{n-2,t+2} M_{t+2}] M_{t+1}] = E_t[P_{n-2,t+2} M_{t+1} M_{t+2}]$
  - $P_{0,t+n} = 1$.
- La log-normalité conjointe conditionnelle des $P_{1t}, P_{2t}, \ldots$ et M_{t+1} donne l'équation de valorisation suivante :

$$p_{nt} = E_t[m_{t+1} + p_{n-1,t+1}] + \frac{1}{2}\mathrm{var}_t[m_{t+1} + p_{n-1,t+1}],$$

où

$$p_{nt} = \log(P_{nt}), \quad m_{t+1} = \log(M_{t+1}).$$

Modèle de Vasicek (1977)

- Dans ce modèle, m_{t+1} est homoscédastique.
- On peut toujours écrire

$$-m_{t+1} = x_t + \epsilon_{t+1},$$

  où $E_t[-m_{t+1}] = x_t$ et $E_t[\epsilon_{t+1}] = 0$.
- Selon le modèle, le facteur x_t est AR(1) :

$$x_{t+1} = (1-\phi)\mu + \phi x_t + \xi_{t+1}.$$

- En général, ϵ_{t+1} et ξ_{t+1} sont corrélés : $\epsilon_{t+1} = \beta\xi_{t+1} + \eta_{t+1}$.
- La partie de ϵ_{t+1} non-corrélée avec ξ_{t+1} n'est pas importante et on l'élimine, alors

$$-m_{t+1} = x_t + \beta\xi_{t+1}.$$

- On a un seul choc dans le système : ξ_t. Soit σ^2 sa variance.

Valorisation des obligations I : Le taux court

- Le log-prix d'une obligation à une période vérifie (parce que $p_{0,t+1} = \log P_{0,t+1} = \log 1 = 0$)

$$p_{1t} = E_t[m_{t+1}] + \frac{1}{2}\mathrm{var}_t[m_{t+1}].$$

- Dans le modèle de Vasicek,

$$p_{1t} = -x_t + \beta^2\sigma^2/2.$$

- Rappelez que le rendement à l'échéance et

$$y_{1t} = -p_{1t} = x_t - \beta^2\sigma^2/2.$$

- Remarquez que y_{1t} est affine en x_t. On peut écrire

$$-p_{1t} = A_1 + B_1 x_t,$$

où $A_1 = -\beta^2\sigma^2/2$, $B_1 = 1$.

Valorisation des obligations II : d'autres échéances

- On devine (et vérifie plus tard) que dans le modèle de Vasicek, p_{nt} (et alors $y_{nt} = -p_{nt}/n$) est aussi affine en x_t :

$$-p_{nt} = A_n + B_n x_t$$

- On sait déjà que $A_1 = -\beta^2\sigma^2/2$ et $B_1 = 1$.
- Rappel :

$$x_{t+1} = (1-\phi)\mu + \phi x_t + \xi_{t+1}.$$

- On vérifie que l'équation de prix affine est correcte et on obtient les coefficients avec

$$E_t[m_{t+1} + p_{n-1,t+1}] = -x_t - A_{n-1} - B_{n-1}(1-\phi)\mu - B_{n-1}\phi x_t$$

$$\mathrm{var}_t[m_{t+1} + p_{n-1,t+1}] = (\beta + B_{n-1})^2\sigma^2$$

- Après substitution dans l'équation de valorisation, on obtient

$$A_n + B_n x_t = x_t + A_{n-1} + B_{n-1}(1-\phi)\mu + B_{n-1}\phi x_t - (\beta + B_{n-1})^2\sigma^2/2.$$

D'autres échéances, continu

- Cette équation doit tenir pour chaque x_t, alors le coefficient de x_t et le coefficient constant doivent égaler à zéro.
- Alors

$$B_n = 1 + \phi B_{n-1} = (1 - \phi^n)/(1 - \phi)$$

$$A_n = A_{n-1} + (1 - \phi)\mu B_{n-1} - (\beta + B_{n-1})^2 \sigma^2 / 2$$

- Une version discrète du modèle célèbre Cox, Ingersoll Ross (1985) est

$$-m_{t+1} = x_t + x_t^{1/2} \epsilon_{t+1}$$

$$x_{t+1} = (1 - \phi)\mu + \phi x_t + x_t^{1/2} \xi_{t+1}$$

- C'est aussi un modèle affine avec un facteur.
- Il y a aussi des modèles avec plusieurs facteurs et des modèles qui ne sont pas affines.

Types de marchés financiers I

1. Marchés gouvernés par les ordres (order driven) (TSX)
   - ordre à cours limité (limit order)
     - ordre d'achat ou ordre de vente
     - proposition de prix
     - durée spécifiée
     - possibilité d'échéance
   - ordre au marché (market order)
     - ordre d'achat ou ordre de vente
     - au meilleur prix proposé de l'autre coté du marché
     - immédiate
   - variations

Types de marchés financiers II

2. Marchés gouvernés par les prix (quote driven) (NYSE, NASDAQ)
    - Teneur du marché (market maker) (un ou plusieurs concurrents)
    - Cours acheteur (bid price) $<$ cours vendeur (ask price)
    - Raisons pour la fourchette acheteur/vendeur :
        - coûts d'affaires ordinaires
        - coûts d'inventaires (risque)
        - information asymétrique

Données de haute fréquence

- Information pour chaque transaction :
  - Prix, quantité, identité de l'actif
  - Date et heure (souvent en secondes, *ms*)
  - Achat ou vente (du point de vue du client du teneur du marché)
  - Achat ou vente (par rapport de l'émetteur de l'ordre au marché)
  - Échange d'un initié ou non
- Sources du « bruit »
  - Quantification du prix (1/8) \$ puis (1/16) \$ puis 0.01 \$
  - Quantification du temps (secondes, puis *ms*)
  - Différence entre le cours acheteur et le cours vendeur
  - La valeur peut changer sans qu'une transaction le rend observé (le prix est rassis)
  - Erreurs (des échangeurs, teneurs des registres)
- Aspect asynchrone

Pourquoi étudier les données de haute fréquence

L'importance:

1. Plus de détail sur la dynamique des prix
2. Information sur la liquidité des marchés, le processus de la découverte des prix (price discovery).
3. Construction de mesures de volatilité
4. Comprendre la microstructure des marchés

La prudence est nécessaire : le bruit de microstructure

Covariances trompeuses (spurious covariances)

- Rendements latents :

$$\begin{bmatrix} R_{At} \\ R_{Bt} \end{bmatrix} \sim \mathrm{iid}\, N\left(\begin{bmatrix} \mu_A \\ \mu_B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{AA} & \Sigma_{AB} \\ \Sigma_{AB} & \Sigma_{BB} \end{bmatrix} \right)$$

- Processus d'observation : $z = \{z_{it}\}_{i \in \{A,B\},\, t \in \mathrm{N}}$
  - pour $i = A, B$, $z_{it} = 1$ si l'actif i est échangé à t, $z_{it} = 0$ sinon.
  - les z_{it} sont mutuellement indépendants
  - $z_{it} = 0$ (pas de transaction) avec probabilité π_i, $i = A, B$

- Rendements observés :

$$r^\circ_{At} = \begin{cases} 0 & z_{At} = 0 \\ r_{At} & z_{At} = 1,\, z_{A,t-1} = 1 \\ r_{At} + r_{A,t-1} & z_{At} = 1,\, z_{A,t-1} = 0,\, z_{A,t-2} = 1 \\ r_{At} + r_{A,t-1} + r_{A,t-2} & z_{At} = 1,\, z_{A,t-1} = z_{A,t-2} = 0,\, z_{A,t-3} = \\ \vdots & \end{cases}$$

La moyenne et la variance de r°_{At}

- Séries géométrique, $|x| < 1$:

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} x^\tau = \frac{1}{1-x}$$

- Sa dérivée par rapport à x :

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \tau x^{\tau-1} = \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau x^{\tau-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

- Maintenant,

$$E[r^\circ_{At}] = E[E[r^\circ_{At}|z]] = \sum_{\tau=1}^{\infty}(1-\pi_A)^2\pi_A^{\tau-1}\tau\mu_A = \mu_A,$$

$$E[(r^\circ_{At})^2] = E[E[(r^\circ_{At})^2|z]] = \sum_{\tau=1}^{\infty}(1-\pi_A)^2\pi_A^{\tau-1}[(\tau\mu_A)^2 + \tau\Sigma_{AA}]$$

$$= \Sigma_{AA} + \frac{1+\pi_A}{1-\pi_A}\mu_A^2.$$

$$\mathrm{Var}[r^\circ_{At}] = \Sigma_{AA} + \frac{2\pi_A}{1-\pi_A}\mu_A^2.$$

Application de la loi de covariance totale

- Selon le modèle,

$$\mathrm{Cov}[r_{At}, r_{A,t-k}] = \begin{cases} \Sigma_{AA} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases},$$

$$\mathrm{Cov}[r_{At}, r_{B,t-k}] = \begin{cases} \Sigma_{AB} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}.$$

- Question: $\mathrm{Cov}[r^\circ_{At}, r^\circ_{A,t-k}] = 0$ et $\mathrm{Cov}[r^\circ_{At}, r^\circ_{B,t-k}] = 0$ pour $k > 0$?
- La loi de covariance totale en général,

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = E[\mathrm{Cov}[X, Y|Z]] + \mathrm{Cov}[E[X|Z], E[Y|Z]].$$

Autocovariances

- Cas spécial, auto-covariances : $X = r^\circ_{At}$, $Y = r^\circ_{A,t-k}$, $Z = z$:

  $\mathrm{Cov}[r^\circ_{At}, r^\circ_{A,t-k}] = E[\mathrm{Cov}[r^\circ_{At}, r^\circ_{A,t-k}|z]] + \mathrm{Cov}[E[r^\circ_{At}|z], E[r^\circ_{A,t-k}|z]]$.

- Sachant z, les sommes r°_{At} et $r^\circ_{A,t-k}$ ne se chevauchent pas et

$$\mathrm{Cov}[r^\circ_{At}, r^\circ_{A,t-k}|z] = 0.$$

- Calcul de $\mathrm{Cov}[E[r^\circ_{At}|z], E[r^\circ_{A,t-k}|z]]$: exercice.
- Résultat : $\mathrm{Cov}[E[r^\circ_{At}|z], E[r^\circ_{A,t-k}|z]] = -\pi^k_A \mu^2_A$.

Covariances croisées

- Cas spécial : $X = r^{\circ}_{At}$, $Y = r^{\circ}_{B,t-k}$, $Z = z$:

$$\mathrm{Cov}[r^{\circ}_{At}, r^{\circ}_{B,t-k}] = E[\mathrm{Cov}[r^{\circ}_{At}, r^{\circ}_{B,t-k}|z]] + \mathrm{Cov}[E[r^{\circ}_{At}|z], E[r^{\circ}_{B,t-k}|z]].$$

- Puisque z_A et z_B sont indépendants,

$$\mathrm{Cov}[E[r^{\circ}_{At}|z], E[r^{\circ}_{B,t-k}|z]] = 0.$$

- Puisque r°_{At} comprend $r_{A,t-k-\tau}$ et $r_{B,t-k}$ comprend $r_{B,t-k-\tau}$ avec probabilité conjointe $(1-\pi_A)(1-\pi_B)\pi_A^k(\pi_A\pi_B)^\tau$,

$$\begin{aligned} E[\mathrm{Cov}[r^{\circ}_{At}, r^{\circ}_{B,t-k}|z]] &= (1-\pi_A)(1-\pi_B)\pi_A^k \sum_{\tau=0}^{\infty}(\pi_A\pi_B)^\tau \Sigma_{AB} \\ &= \frac{(1-\pi_A)(1-\pi_B)}{1-\pi_A\pi_B}\pi_A^k \Sigma_{AB} \end{aligned}.$$

Rebond acheteur/vendeur I

- Modèle simple illustratif, version 1 :
  - Transactions aux prix $P_t \in \{P_a, P_v\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots$
  - $P_v - P_a \equiv S > 0$.
  - P_t est iid.
  - $P_t = P_v$ avec probabilité 0.5, $P_t = P_a$ avec probabilité 0.5
  - $\Delta P_t \equiv P_t - P_{t-1}$.
- Calcul des moments
  - $E[\Delta P_t] = 0$ par stationnarité
  - $\mathrm{Var}[\Delta P_t] = \frac{1}{4}S^2 + \frac{1}{4}(-S)^2 + \frac{1}{4}0 + \frac{1}{4}0 = \frac{S^2}{2}$
  - $\mathrm{Cov}[\Delta P_t, \Delta P_{t-1}] = \frac{1}{8}S(-S) + \frac{1}{8}(-S)S + \frac{2}{8}0 \cdot 0 + \frac{1}{8}0 \cdot S + \frac{1}{8}S \cdot 0 + \frac{1}{8}0 \cdot (-S) + \frac{1}{8}(-S) \cdot 0 = -\frac{S^2}{4}$
  - $\mathrm{Corr}[\Delta P_t, \Delta P_{t-1}] = -0.5$
  - $\mathrm{Cov}[\Delta P_t, \Delta P_{t-k}] = 0$ pour $k > 1$ parce que (P_t, P_{t-1}) et (P_{t-k}, P_{t-k-1}) sont indépendantes.

Rebond acheteur/vendeur II

- Modèle avec changements de valeur :
  - $P_t = P_t^* \pm S/2$
  - $\Delta P_t^* = P_t^* - P_{t-1}^* \sim \mathrm{iid}(0, \sigma^2)$
  - La séquence P_t^* et les réalisations $\pm S/2$ sont indépendantes.
  - $\mathrm{Var}[\Delta P_t] = \sigma^2 + S^2/2$
  - $\mathrm{Cov}[\Delta P_t, \Delta P_{t-1}] = -S^2/4$, inchangé
  - réduction de corrélation.