Tarification Optimale

ECN 6013, automne 2019

William McCausland

2019-12-02

Tarification optimale - producteur

- Il y a un producteur monopoliste d'électricité.
- Coût linéaire : le coût marginal de production est de $c > 0$, une constante.
- Le producteur choisit une tarification $T(x)$: un consommateur paie $T(x)$ pour x unités d'électricité.
- La revente est impossible.
- Soit $M(x) = T(x) - cx$ la majoration (ou le profit).
- Le producteur choisit $T(x)$ pour maximiser son profit.

Modèle de base avec un seul type de consommateur

- Le consommateur a l'utilité métrique monétaire $U(x)$ comme function de sa consommation de l'électricité.
- $U(x)$ est croissante, concave, différentiable.
- Normalisation : $U(0) = 0$.
- Alors $V(x) = U(x) - cx$ est le surplus total associé à la consommation x.
- Le consommateur choisit x pour maximiser $U(x) - T(x)$.
- On suppose que $V'(0) = U'(0) - c > 0$ pour garantir que la quantité efficace de x est strictement positive.

Équilibre avec un seul type de consommateur

- Un équilibre est une tarification $T(x)$ et une consommation $\bar{x}$ telles que
  - $T(x)$ maximise le profit du monopole, sachant que le consommateur optimise.
  - $\bar{x}$ maximise $U(x) - T(x)$ pour $x \geq 0$.
- Le monopole peut faire une offre à prendre ou à laisser alors peut extraire tout le surplus.
- Alors le monopole maximise le surplus total et choisit $T(x)$ pour en extraire tout.
- Le surplus est maximal pour $\bar{x}$ qui vérifie la CPO $U'(\bar{x}) = c$.
- $T(x)$ tel que $T(x) \geq U(x)$, avec égalité pour $\bar{x}$ seulement, est optimal pour le producteur.
- Le profit est $\bar{M} \equiv M(\bar{x}) = V(\bar{x}) = U(\bar{x}) - c\bar{x}$.

Une autre approche

- Le monopole offre la quantité x à un prix total p.
- Le consommateur accepte ssi $p \leq U(x)$.
- Le problème du monopole est

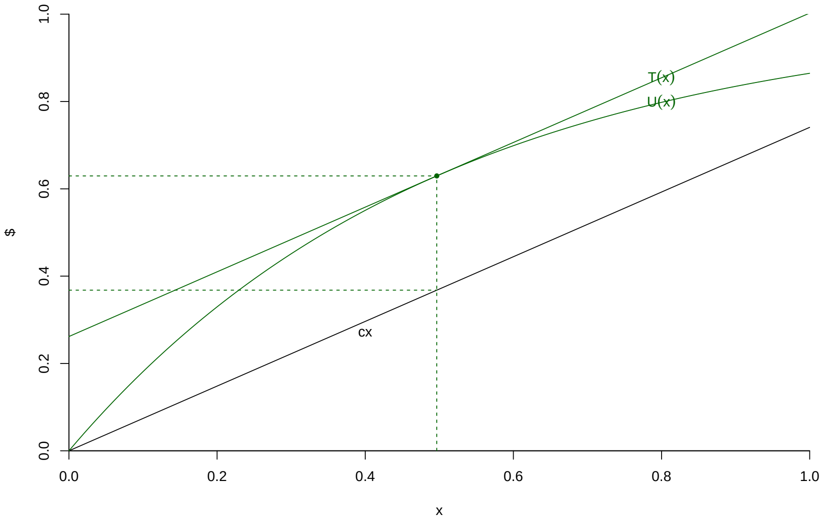
$$\max_{p,x} \Pi(p,x) = p - cx \quad \text{tel que} \quad p \leq U(x).$$

- La contrainte de participation $p \leq U(x)$ est saturée et on peut l'utiliser pour éliminer p.
- Le problème devient

$$\max_{x} \Pi(x) = U(x) - cx.$$

- La quantité optimale $\bar{x}$ vérifie $U'(\bar{x}) = c$, maximise le surplus total, est efficace.
- Le prix est de $p = U(\bar{x})$, alors tout le surplus va au monopole.
- Interprétation : une firme choisit la qualité x d'un produit, mesurée en terme de coût.

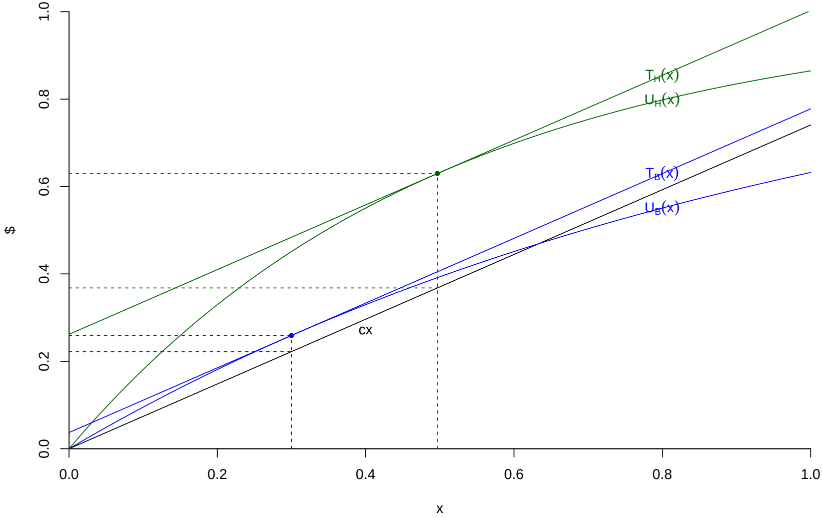
Illustration, équilibre avec un type de consommateur



Modèle avec deux types de consommateur, types observés

- Deux types : H (haute demande) et B (basse demande) en proportions π et $(1-\pi)$.
- Les utilités sont $U_H(x)$ et $U_B(x)$ avec les mêmes propriétés que $U(x)$ plus $U_H'(x) > U_B'(x)$ pour tous $x \geq 0$.
- Le surplus par consommateur de type t est de $V_t(x) \equiv U_t(x) - cx$.
- Un équilibre est une $T_H(x)$, une $T_B(x)$, $\bar{x}_B$ et $\bar{x}_H$ telles que
  - $T_t(x)$ maximise la majoration pour les consommateurs de type t, $t = B, H$.
  - $\bar{x}_t$ maximise $U_t(x) - T_t(x)$, $t = B, H$.
- En équilibre,
  - $\bar{x}_t$ vérifie $U_t'(\bar{x}_t) = c$, $t = B, H$. (CPO pour max de surplus)
  - $T_t(x) \geq U_t(x)$, avec égalité pour $\bar{x}_t$ seulement, $t = B, H$.
  - le profit par consommateur est $\pi \bar{M}_B + (1-\pi)\bar{M}_H$, où $\bar{M}_t \equiv M(\bar{x}_t) = V_t(\bar{x}_t) = U_t(\bar{x}_t) - c\bar{x}_t$, $t = B, H$.
- L'équilibre est efficace : pour les deux types, la bénéfice marginale égale le coût marginal c.

Illustration, deux types observés



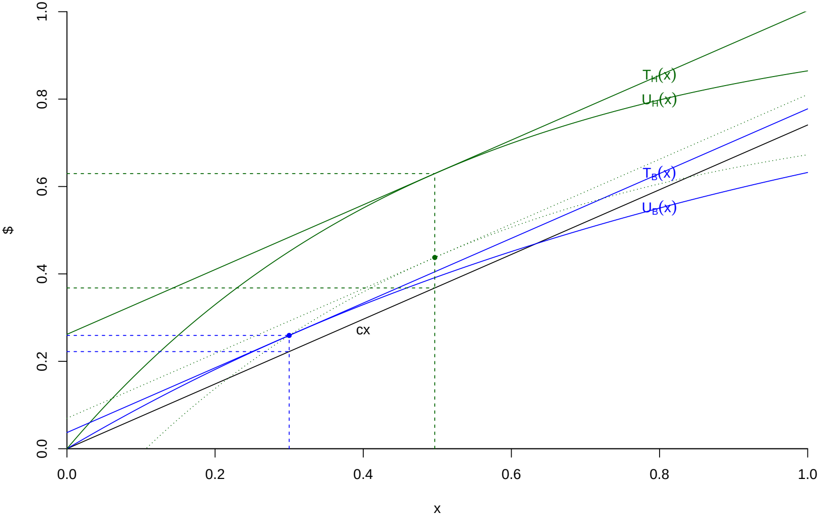
Modèle avec deux types de consommateur, types non-observés

- Qu'est-ce qui se passe avec une seule $T(x)$ qui vérifie $T(\bar{x}_t) = U(\bar{x}_t)$, $t = B, H$?
- Le producteur peut réduire la majoration au point $\bar{x}_H$ jusqu'à M_H^0 qui vérifie

$$V_H(\bar{x}_H) - M_H^0 = V_H(\bar{x}_B) - \bar{M}_B,$$

  comme résultat :
  - les quantités efficaces $\bar{x}_B$ et $\bar{x}_H$ sont les choix optimaux,
  - le surplus $V_B(\bar{x}_B) - c\bar{x}_B$ va au monopole,
  - le surplus $V_H(\bar{x}_H) - c\bar{x}_H$ est partagé entre les H et le monopole.
- Cependant, ceci ne maximise pas le profit du monopole.

Tarification efficace



Tarification optimale I

- Soit p_t le prix total et x_t la quantité pour le type t en équilibre, $t = B, H$.
- On peut construire $T(x)$ plus tard qui vérifie $p_B = T(x_B)$ et $p_H = T(x_H)$.
- Le monopole fait face à quatres contraintes :
  - la contrainte de participation pour les deux types

$$U_t(x_t) \geq p_t, \quad t = B, H,$$

  - les contraintes d'autosélection pour les deux types

$$U_H(x_H) - p_H \geq U_H(x_B) - p_B, \quad U_B(x_B) - p_B \geq U_B(x_H) - p_H.$$

- Les deux contraintes saturées sont la contrainte de participation des B et la contrainte d'autosélection des H.

Tarification optimale II

- Le problème du monopole : sous les quatres contraintes, choisir p_B, p_H, x_B, x_H pour maximimizer le profit

$$\Pi(p_H, p_B, x_H, x_B) = \pi(p_H - cx_H) + (1 - \pi)(p_B - cx_B).$$

- On peut éliminer p_B avec la contrainte (saturée) de participation des B :

$$p_B = U_B(x_B).$$

- On peut éliminer p_H avec la contrainte (saturée) d'autosélection des H :

$$p_H = U_H(x_H) - U_H(x_B) + p_B = U_H(x_H) - U_H(x_B) + U_B(x_B)$$

- On obtient le problème de maximisation libre de $\Pi(x_H, x_B)$:

$$\pi(U_H(x_H) - U_H(x_B) + U_B(x_B) - cx_H) + (1 - \pi)(U_B(x_B) - cx_B).$$

Tarification optimale III

- Une condition nécessaire de première ordre :

$$\frac{\partial \Pi(x_H, x_B)}{\partial x_H} = \pi(U'_H(x_H) - c) = 0.$$

- Notez que

$$\frac{\partial^2 \Pi(x_H, x_B)}{\partial x_H^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi(x_H, x_B)}{\partial x_H \partial x_B} = 0.$$

- x_H^* vérifie $U'_H(x_H^*) = c$ et $x_H^* = \bar{x}_H$, la quantité efficace pour les H et ce, peu importe la valeur de π.
- Cette CPO donne x_H^* mais pas le prix p_H^* ni le profit $p_H^* - cx_H^*$ associé aux H.
- Le partage du surplus est toujours à déterminer.

Tarification optimale IV

- L'autre condition nécessaire de première ordre pour une solution intérieure $x_B^* > 0$:

$$U_B'(x_B^*) - \pi U_H'(x_B^*) - c = 0.$$

- Pour π ou $U_H'(x_B) - U_B'(x_B)$ suffisament élevé, $x_B^* = 0$ est optimale.
- On ne peut pas dire sans d'autres informations si $x_B^* = 0$ ou $x_B^* > 0$, mais on peut dire que $x_B^* < \bar{x}_B$: $\pi U_H'(x_B) > 0$ alors la solution de $U_B'(x_B^*) = c + \pi U_H'(x_B^*)$ est moins grande que la solution de $U_B'(\bar{x}_B) = c$.
- La quantité x_B^* est moins grande que la quantité efficace $\bar{x}_B$, $U_B(x_B^*) > c$.