Information cachée et l'assurance

ECN 6013, automne 2019

William McCausland

2019-11-11

Introduction à l'information cachée et l'assurance

Quelques faits empiriques sur l'assurance :

- Le prix varie selon le risque.
- Les firmes spécifient et un prix et une quantité.
- Un contrat n'est pas en force si le client a deux contrats d'assurance.
- Des marchés manquants.

La mesure de risque :

- Il y a des facteurs de risque observables.
- Il y a des facteurs de risque non-observables qui sont révélés en équilibre.

Les facteurs de risque observables sont parfois subtile

Figure 1: La variation de prix par type observée

Un menu de choix

L'université de Montréal m'offre trois choix d'assurance médicale :

Soins médicaux		
Trois (3) options	**Dépenses remboursées en pourcentage (%)**	**Prime**
Option 1 :	70 %, avec des protections moins généreuses.	La prime payable est moins élevée.
Option 2 :	80 %, la valeur de cette option est équivalente au régime actuel.	La prime est similaire au régime actuel.
Option 3 :	90 %, avec des protections plus généreuses.	La prime est plus élevée.

- Le choix révèle de l'information cachée pertinente.
- Population pertinente : *tous* les profs à l'U de M.
- Pas de variation par âge, sexe ou autres indices.
- Choix limité de quantité; l'assurance à 100% n'est pas une option.
- Autres exemples : assurance auto, vie, immeuble.

Décisions face à l'incertitude - objets de choix

- Il y a deux états du monde possibles, mutuellement exclusifs et exhaustifs.
- Voici deux exemples stylisés :
  - montée de la bourse (rendement de $u = 0.10$), chute de la bourse (rendement de $d = -0.05$),
  - un accident de voiture n'arrive pas, un accident de voiture arrive
- Un panier est (x, y), où
  - x est la consommation réelle dans le « bon » état,
  - y est celle dans le « mauvais ».
- Dans le papier de Rothschild et Stiglitz, (x, y) est (W_1, W_2).

Décisions face à l'incertitude - préférences

- Utilité espérée objective
  - Le mauvais état a une probabilité objective de π; le bon, $1-\pi$.
  - Les probabilités sont primitives et objectives.
  - Si les préférences (sur les loteries) vérifient les axiomes de von Neumann-Morgenstern, il existe une fonction d'utilité $U(\cdot)$ telle que les préférences sont représentées par la fonction d'utilité

$$V(x,y) = (1-\pi)U(x) + \pi U(y).$$

  - Tous les agents dans un modèle connaissent les probabilités.
- Utilité espérée subjective
  - Si les préférences vérifient les axiomes de Savage, il existe des probabilités π et $1-\pi$ et une fonction d'utilité $U(\cdot)$ telles que les préférences sont représentées par la fonction d'utilité

$$V(x,y) = (1-\pi)U(x) + \pi U(y).$$

  - Les probabilités font partie de la représentation.
  - Les agents ont des probabilités subjectives différentes.

L'aversion pour le risque

- Par l'hypothèse habituelle, $U(\cdot)$ est croissante et concave.
- Si $U(\cdot)$ est concave, l'agent a de l'aversion pour le risque.
- Une implication de la concavité de $U(\cdot)$ est

$$U((1-\pi)x + \pi y) \geq (1-\pi)U(x) + \pi U(y).$$

- C'est à dire qu'un agent avec une aversion pour le risque préfère la valeur espérée sûre d'une loterie à la loterie.
- Une autre implication de la concavité de $U(\cdot)$ est la concavité de $V(x, y)$.

Illustration - aversion pour le risque

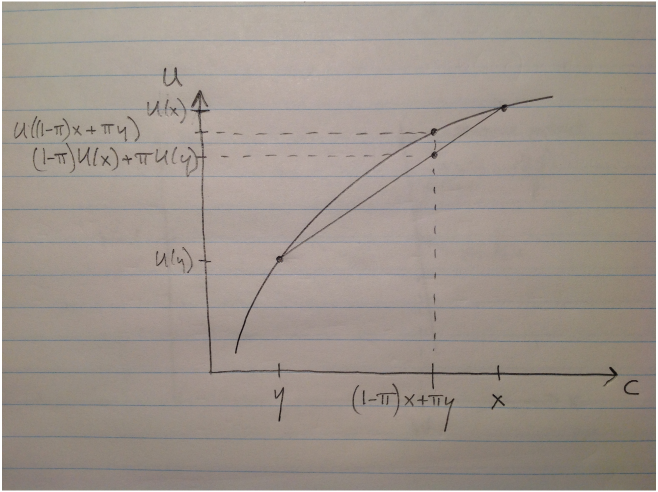

Figure 2: L'utilité espérée et l'aversion pour le risque

Décisions face à l'incertitude - dotation

- Exemple de bourse
  - L'investisseur a un montant w à investir.
  - Par défaut, il obtient un rendement réel sans risque de r.
  - Sa dotation est $(w(1+r), w(1+r))$.
  - L'utilité de sa dotation est de $U(w(1+r))$.
- Exemple d'auto
  - Par défaut, le conducteur n'a pas d'assurance.
  - Si l'accident ne se produit pas, il a une consommation W.
  - Si l'accident se produit, il perd d et sa consommation est $W-d$.
  - Sa dotation est $(W, W-d)$.
  - L'utilité de sa dotation est de $(1-\pi)U(W)+\pi U(W-d)$.

Décisions face à l'incertitude - contraintes I

Dans l'exemple de bourse, (rendements r, u, d avec $d < r < u$)

- L'investisseur place c dans la bourse avec résultat

$$x = (w - c)(1 + r) + c(1 + u) = w(1 + r) + c(u - r)$$

$$y = (w - c)(1 + r) + c(1 + d) = w(1 + r) - c(r - d)$$

- On peut exprimer la contrainte budgétaire comme

$$(1 - p)x + py = w(1 + r),$$

où

$$(1 - p) = \frac{r - d}{u - d}, \qquad p = \frac{u - r}{u - d}.$$

- Panier pour $c = 0$ (dotation) : $(w(1 + r), w(1 + r))$
- Panier pour $c = w$: $(w(1 + u), w(1 + d))$
- Interprétation de $c > w$: levier
- Interprétation de $c < 0$: vente à découvert

Illustration de la contrainte I

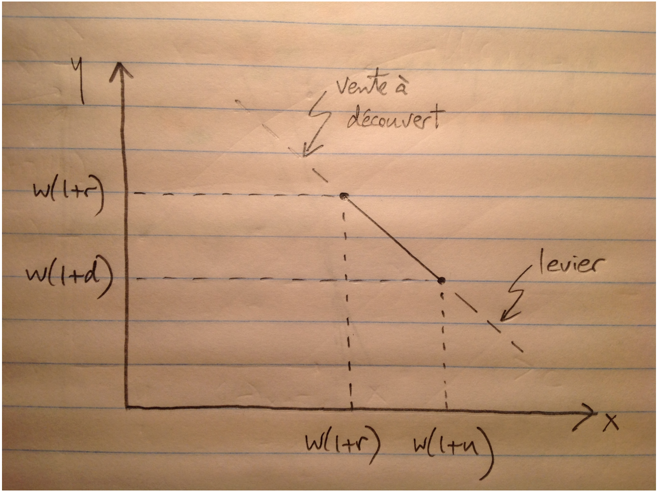

Figure 3: Contrainte pour l'exemple bourse

Décisions face à l'incertitude - contraintes II

Dans l'exemple de client d'assurance,

- On suppose que l'assureur offre des contrats qui donnent un dollar dans le mauvais état, en quantité illimitée, pour un prix p par contrat.
- On l'observe rarement. Habituellement les assureurs spécifient et une quantité et un prix.
- Le client achète c contrats, avec résultat

$$x = W - pc, \qquad y = W - d + c - pc.$$

- Si on élimine c on obtient le budget

$$(1-p)x + py = (1-p)W + p(W-d) = W - pd.$$

- Panier pour $c = 0$ (la dotation) : $(W, W-d)$.

Illustration de la contrainte II

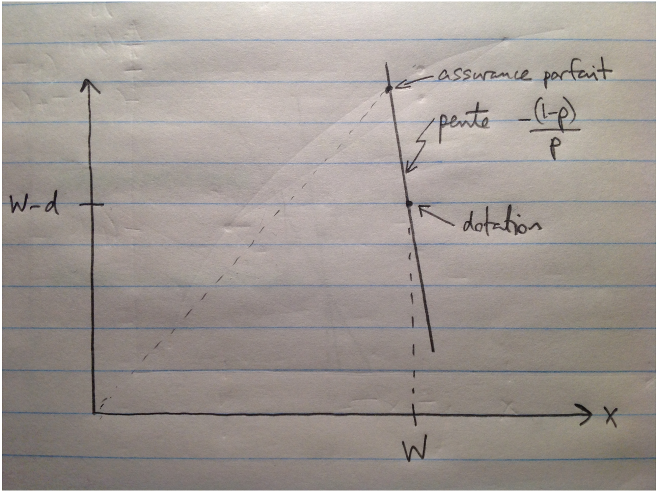

Figure 4: Contrainte pour l'exemple auto

Les contraintes à cote juste

- On ne suppose pas *a priori* que le prix p et la probabilité π sont reliés.
- Une contrainte où $p = \pi$ est dite à cote juste.
- Le profit espéré de l'assureur associé à un contrat est

$$\Pi = (1 - \pi)p + \pi(p - 1) = p - \pi.$$

- Avec les prix à cote juste, le profit espéré est zéro.
- L'entrée et la sortie des firmes dirigent le profit vers zéro.
- La contrainte pour une assurance où π est le prix d'un dollar dans le mauvais état est à cote juste.
- Plus en général, la contrainte pour un actif qui coûte sa valeur espérée est à cote juste.

Choix optimal de l'agent

- Dans les deux exemples, on a la contrainte

$$(1-p)x + py = \theta,$$

où $\theta = w(1+r)$ (bourse) ou $\theta = W - pd$ (auto).
- p est le prix de consommation dans le mauvais état; $(1-p)$, celui dans le bon.
- Le numéraire est le prix de consommation certaine.
- Le problème du consommateur est

$$\max_{x \geq 0, y \geq 0} (1-\pi)U(x) + \pi U(y) \quad \text{s.c.} \quad (1-p)x + py = \theta.$$

- Une condition nécessaire pour un maximum est que le taux marginal de substitution égal le ratio de prix :

$$\frac{(1-\pi)U'(x)}{\pi U'(y)} = \frac{1-p}{p}.$$

Le théorème d'assurance complète

Le théorème de l'assurance complète dit que le choix optimal face à une contrainte à cote juste est $x^* = y^* = \theta$.

- Les deux conditions nécessaire pour un maximum :

$$\frac{(1-\pi)U'(x)}{\pi U'(y)} = \frac{1-p}{p}, \qquad (1-p)x + py = \theta,$$

  deviennent, quand $p = \pi$, $x = y = \theta$.
- Pour le choix optimal, la consommation ne dépend pas de l'état du monde.
- On dit que l'assurance est complète et le risque est éliminé.
- Si $p > \pi$, la contrainte n'est pas à cote juste et l'assurance est incomplète : le taux marginal de substitution est moins grand que $(1-\pi)/\pi$ ssi $x > y$.

Notes sur l'équilibre pour le modèle de base

- Les clients sont identiques : la probabilité π, la dotation $(W, W - d)$ et l'utilité $U(\cdot)$ sont fixes.
- Ou il y a un grand nombre de clients ou des assureurs sont neutres au risque :
  - le risque agrégé est zéro ou n'est pas important.
- Il y a un grand nombre d'assureurs, avec la possibilité d'entrée et de sortie :
  - en équilibre il n'y a pas de profits.
- Le profit espéré d'un assureur qui vend une police au prix p à un client qui en achète c unités est de $pc - \pi c$.
- Si $p < \pi$, l'assureur perd de l'argent. Impossible dans un équilibre, parce que l'assureur partirait.
- Si $p > \pi$, il y a un profit. Un autre assureur peut offrir un meilleur prix et attirer des clients.
- En équilibre, $p = \pi$.

Équilibre pour le modèle sans action ni information cachée

Un équilibre est un prix p et un panier (x^*, y^*) tel que

- (x^*, y^*) maximise $V(x, y) = (1 - \pi)U(x) + \pi U(y)$ sous la contraint $(1 - p)x + py = (1 - p)W + p(W - d) = W - pd$,
- la firme maximise son profit espéré,
- le profit de la firme est zéro. Résultat : en équilibre, $p = \pi$, $x^* = y^* = W - pd$.

Efficacité de l'équilibre (modèle sans action cachée)

- En équilibre, $p^* = \pi$ et $x^* = y^* = \theta \equiv W - \pi d$.
- L'efficacité de cet équilibre est une conséquence du premier théorème de bien-être.
- Démonstration directe :
  - Supposez que l'équilibre n'est pas efficace : pour tous client i, l'utilité de son allocation (x_i, y_i) est plus grande ou égale à l'utilité de (x^*, y^*). Pour au moins un client c'est plus grande.
  - (x^*, y^*) maximise l'utilité dans la région $(1 - \pi)x + \pi y \leq \theta$, alors pour tous i, $(1 - \pi)x_i + \pi y_i \geq \theta$. L'égalité est stricte pour au moins un client.
  - L'allocation agrégée (X, Y) vérifie $(1 - \pi)X + \pi Y > \theta$.
  - Dans une économie avec un grand nombre de clients, (X, Y) n'est pas faisable.

Assurance avec information cachée - clients

- Nous passons maintenant au modèle Rothschild-Stiglitz.
- Attention : dans ce papier, p est une probabilité; π, un profit.
- Deux types de clients, haut risque (H) et bas risque (B)
- n_H clients de type H, n_B de type B, n_H et n_B très grands.
- Dans le modèle final, le type est caché.
- La probabilité d'un accident est π_H ou π_B, selon le type et

$$\pi_H > \pi_B.$$

- Il n'y a pas d'action cachée : la probabilité est exogène.
- Leur dotation (peut importe le type) est $(W, W - d)$, ou
  - W est celle dans le bon état,
  - $W - d$ est la consommation dans le mauvais état.

Assurance avec information cachée - utilité

- Les utilités sont

$$V_t(x, y) = (1 - \pi_t)U(x) + \pi_t U(y), \quad t = B, H,$$

  où x est la consommation dans le mauvais état, y est celle dans le bon état.
- Monotonicité, aversion pour le risque : $U' > 0$, $U'' < 0$.
- À chaque point (x, y), le taux marginal de substitution est toujours moins élevé pour le type H :

$$\frac{(1 - \pi_H)U'(x)}{\pi_H U'(y)} < \frac{(1 - \pi_B)U'(x)}{\pi_B U'(y)}.$$

Assurance avec information cachée - firmes

- Beaucoup de firmes en concurrence.
- Elles offrent des contrats de la forme $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, où α_1 est le prix d'assurance et α_2 est le paiement net en cas d'accident.
- On peut décrire le même contrat comme (x, y), où $x = W - \alpha_1$, $y = W - d + \alpha_2$.
- Les firmes peuvent offrir plusieurs contrats : (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... et peuvent interdire l'achat de contrats multiples.
- Profit espéré pour un contrat (x, y) vendu à un client de type t :

$$(1 - \pi_t)\alpha_1 + \pi_t(-\alpha_2) = (1 - \pi_t)(W - x) + \pi_t(W - d - y)$$

- Condition pour un profit nul espéré pour un type connu t est

$$(1 - \pi_t)x + \pi_t y = W - \pi_t d.$$

Profit pour un mélange

- Une possibilité qu'il faut considérer : on vend le même contrat à tout le monde.
- La condition pour un profit nul espéré pour un seul contrat accepté par les deux types est

$$(1-\pi)x + \pi y = W - \pi d,$$

où

$$\pi \equiv \frac{\pi_H n_H + \pi_B n_B}{n_H + n_B}.$$

- Pourquoi? Si A est l'évènement où le mauvais état arrive pour un client de type inconnue,

$$\begin{aligned}\Pr[A] &= \Pr[t = H] \Pr[A|t = H] + \Pr[t = B] \Pr[A|t = B] \\ &= \frac{n_H}{n_H + n_B}\pi_H + \frac{n_B}{n_H + n_B}\pi_B.\end{aligned}$$

Régions de profit

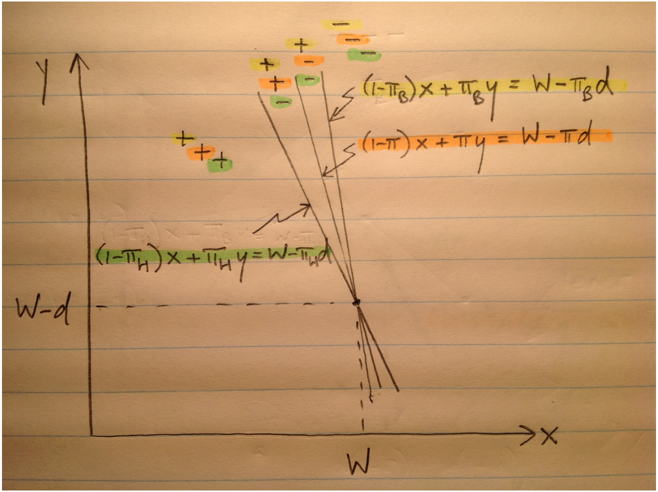

Figure 5: Les régions de profit pour B, H, la population

Cas d'information complète

- Mettons que la firme observe les types et peut discriminer.
- Elle offre le contrat $(x_t, y_t) = (W - \pi_t d, W - \pi_t d)$ aux clients de type t, $t = B, H$.
- Les clients des deux types acceptent leur contrat.
- Au contrat (x, y) quelconque, le taux marginal de substitution du type t $(t = B, H)$ est de

$$\frac{\partial V_t(x,y)/\partial x}{\partial V_t(x,y)/\partial y} = \frac{(1-\pi_t)U'(x)}{\pi_t U'(y)}.$$

- En équilibre, le TMS du client de type t au contrat (x_t, y_t) est de $(1-\pi_t)/\pi_t$.
- Le risque disparaisse, l'allocation est efficace.

L'équilibre en cas d'information complète

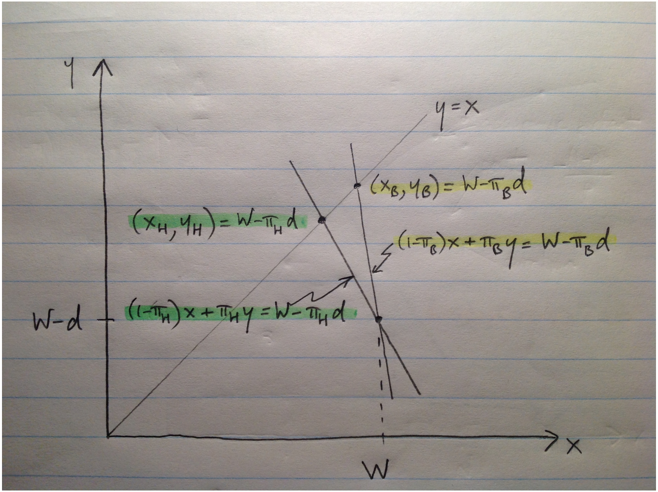

Figure 6: L'équilibre en cas d'information complète, avec $x_H = y_H$, $x_B = y_B$

Équilibre avec information cachée

Un équilibre est un ensemble de contrats $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\}$ et un allocation (x, y) pour chaque client tel que

- l'allocation à chaque client est le contrat (ou la dotation) qui maximise son utilité,
- les firmes maximise le profit espéré,
- il n'y a pas d'autre contrat qui donne un profit (à une firme qui l'offre) si tous les clients qui le préfère le prend.

Nombre de contrats en équilibre

- Proposition : tous les clients de type i choisit le même contrat.
- Preuve : supposons que non, il y a deux contrats (x_1, y_1) et (x_2, y_2) choisis par des clients de type i. On peut conclure
  - $U(x_1, y_1) = U(x_2, y_2)$ (sinon personne choisirait l'inférieur)
  - les profits s'égalent (sinon le moins profitable est retiré)
  - Soit $(x, y) = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$, pour $\lambda \in (0, 1)$.
  - (x, y) donne le même profit à la firme et le client le préfère.
  - Il y a une occasion pour profiter, impossible dans un équilibre.
  - Il y a un contradiction, la proposition doit être vraie.

Assurance, information cachée - équilibre mélangeant

- Un contrat unique en équilibre (x_P, y_P) doit vérifier
  - deux contraintes de participation :

$$V_t(x_P, y_P) \geq V_t(W, W - d), \quad i = B, H,$$

  - la condition de profit zéro :

$$(1 - \pi)x_P + \pi y_P = W - \pi d,$$

  où π est la probabilité marginale d'un accident :

$$\pi = \frac{\pi_H n_H + \pi_B n_B}{n_H + n_B}.$$

- Aussi, il ne peut pas y avoir des possibilités de profit avec des déviations.
- Un tel équilibre est impossible (graphiques).

Impossibilité de l'équilibre mélangeant I

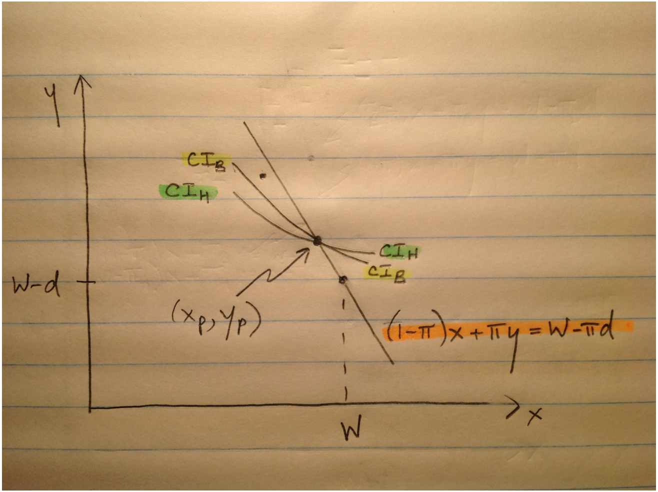

Figure 7: Cas $TMS_H < TMS_B < (1-\pi)/\pi$

Impossibilité de l'équilibre mélangeant II

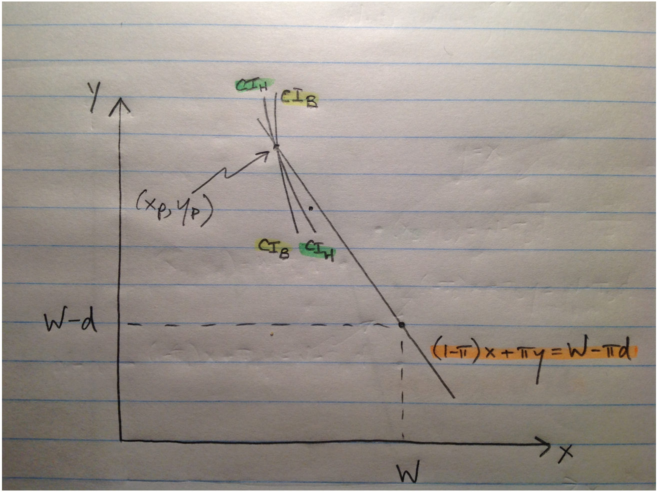

Figure 8: Cas $(1-\pi)/\pi < TMS_H < TMS_B$

Impossibilité de l'équilibre mélangeant III

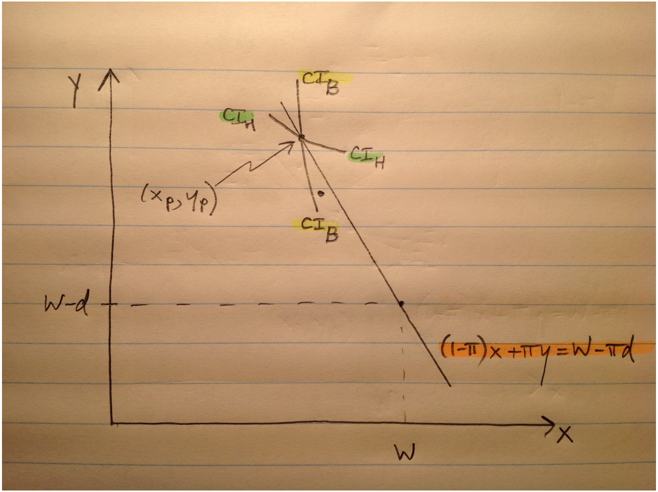

Figure 9: Cas $TMS_H < (1-\pi)/\pi < TMS_B$

Impossibilité de l'équilibre mélangeant IV

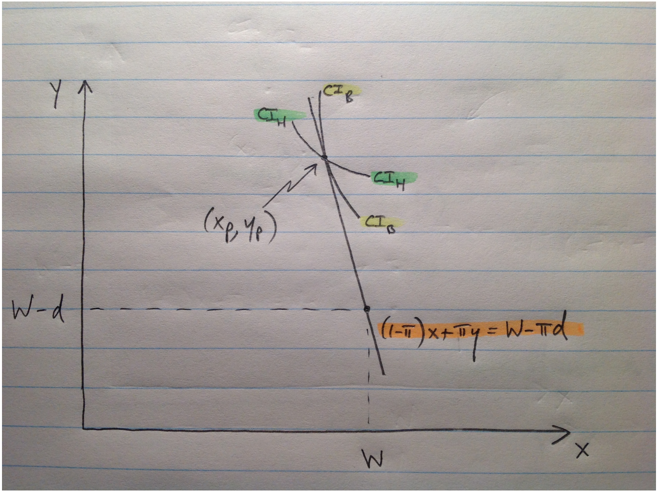

Figure 10: Cas $TMS_H < TMS_B = (1-\pi)/\pi$

Impossibilité de l'équilibre mélangeant V

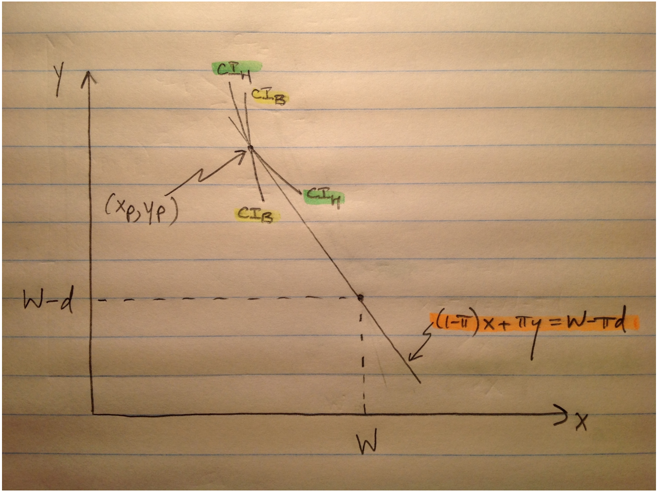

Figure 11: Cas $TMS_H = (1 - \pi)/\pi < TMS_B$

Assurance avec information cachée - équilibre «séparant»

Des contrats (x_B, y_B), (x_H, y_H) en équilibre doivent vérifier

- deux contraintes de participation :

$$V_t(x_t, y_t) \geq V_t(W, W - d), \quad t = B, H,$$

- les conditions de profit zéro :

$$(1 - \pi_t)x_t + \pi_t y_t = W - \pi_t d, \quad t = B, H,$$

- les contraintes d'auto-sélection :

$$V_B(x_B, y_B) \geq V_B(x_H, y_H), \quad V_H(x_H, y_H) \geq V_H(x_B, y_B).$$

Notes :

- En équilibre les types H obtiennent de l'assurance parfaite, $x_H = y_H = W - \pi_H d$.
- La contrainte d'auto-sélection est saturée pour les H, non les B.

Un équilibre séparant

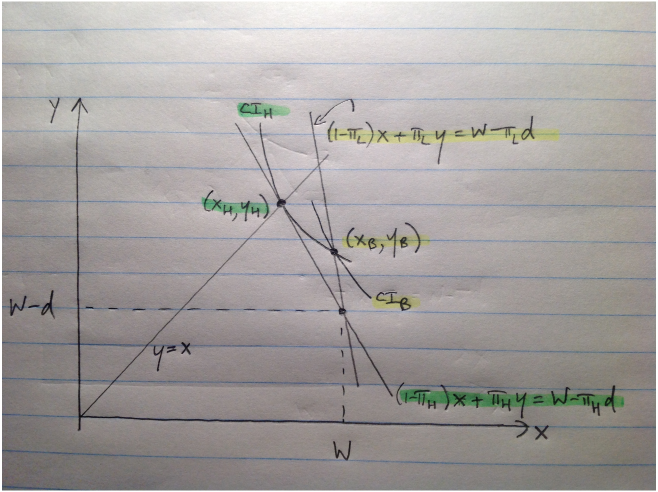

Figure 12: Un équilibre séparant, avec $x_H = y_H$, $TMS_B > (1 - \pi_B)/\pi_B$

En équilibre, $x_H = y_H$, assurance parfaite

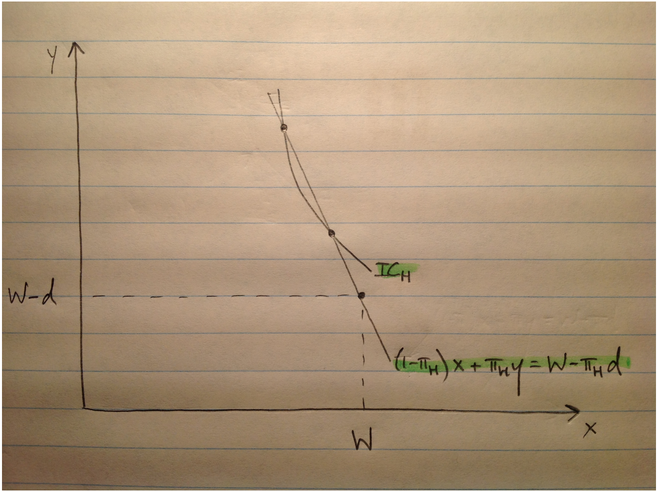

Figure 13: Deux contrats impossibles en équilibre