Enchères

ECN 6013, automne 2019

William McCausland

2019-09-30

Préliminaires mathématiques

Fonction de répartition pour le maximum de variables aléatoires indépendantes :

- Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes.
- Soit $Z = \max(X, Y)$.
- Soit F_x, F_y et F_z les fonctions de répartitions.
- Soit f_x, f_y et f_z les densités.
- Alors

$$\begin{aligned} F_z(z) &= \Pr[Z \leq z] \\ &= \Pr[X \leq z \text{ et } Y \leq z] \\ &= \Pr[X \leq z] \Pr[Y \leq z] \\ &= F_x(z) F_y(z). \end{aligned}$$

  et

$$f_z(z) = f_x(z) F_y(z) + F_x(z) f_y(z).$$

Exemples

- Soit $U_i \sim \mathrm{iid}\,\mathrm{U}(0,1)$, $i = 1, \ldots, n$.
- Soit $X_2 = \max(U_1, U_2)$, $X_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$.
- La fonction de répartition pour U_i est

$$F(u_i) = \begin{cases} 0 & u_i < 0, \\ u_i & 0 \leq u_i \leq 1, \\ 1 & u_i > 1. \end{cases}$$

- Celle pour X_2 est

$$F(x_2) = \begin{cases} 0 & x_2 < 0, \\ x_2^2 & 0 \leq x_2 \leq 1, \\ 1 & x_2 > 1. \end{cases}$$

- La densité pour X_2 est $f(x_2) = 2x_2$ pour $0 \leq x_2 \leq 1$.

Exemples (cont.)

- La fonction de répartition pour X_n est

$$F(x_n) = \begin{cases} 0 & x_n < 0, \\ x_n^n & 0 \leq x_n \leq 1, \\ 1 & x_n > 1. \end{cases}$$

- La densité pour X_n est $f(x_n) = n x_n^{n-1}$ pour $0 \leq x_n \leq 1$.

Enchères: l'environnement

- Un nombre n d'enchérisseurs ou joueurs.
- Un seul objet indivisible à vendre.
- Joueur i à une valeur de réservation v_i, le montant maximal que il paierait pour l'objet.
- Le résultat d'une vente aux enchères est le transfert (ou non) à un joueur (le gagnant) de l'objet et des paiements, souvent un seul paiement du gagnant au vendeur.
- L'action est souvent une enchère ou une séquence d'enchères.
- Le résultat est efficace si et seulement si l'objet finit par appartenir à l'agent (joueur ou vendeur) avec la valeur maximale, peut importe le paiement.
- *Ex post*, un résultat efficace ne domine pas forcément l'allocation initiale.
- On verra cinq jeux (ou enchères) différents.

Valeurs communes et valeurs privées

- Enchères aux valeurs privées :
  - Pour enchérisseur i, v_i est connu et fixe.
  - Savoir v_j ne change pas v_i (mais peut changer b_i).
  - Exemples plausibles : enchère sur eBay d'un jouet de valeur sentimentale, enchère de poisson (Tokyo, Sydney).
- Enchères aux valeurs communes :
  - Il y a une valeur objective de l'objet.
  - Les joueurs ne savent pas combien vaut l'objet.
  - Chacun observe un signal de valeur, une information pertinente.
  - Exemple plausible : droits miniers sur un terrain, toutes les firmes ont le même coût d'exploitation, une firme peut avoir une information que les autres n'ont pas.
- Il y a des cas intermédiaires entre ces cas extrêmes.
- Sauf pour les diapos « malédiction du gagnant » on suppose que les valeurs sont privées.

L'enchère anglaise (ou ascendante)

- Participation asynchrone.
- Les joueurs peuvent à tout moment déclarer publiquement une surenchère, une enchère plus grande que la plus récente.
- Le gagnant est le joueur avec la dernière enchère.
- Il paie un montant égale à sa dernière enchère.
- S'il n'y a pas d'enchère, l'objet revient au vendeur.
- Des fois, il y a un prix minimum.
- Associée aux maisons de vente aux enchères Sotheby's et Christie's de Londres.

La vente aux enchères hollandaise (ou descendante)

- Il y a un cadran avec des valeurs de zéro jusqu'à une valeur très élevée.
- La valeur affichée sur le cadran décroit jusqu'à ce qu'un joueur arrête le cadran.
- Ce joueur est le gagnant, il est obligé à payer le montant au cadran.
- Si le prix minimum est atteint, l'objet revient au vendeur.
- Associée avec la vente des tulipes en hollande.

Enchère sous pli cacheté au premier prix

- Une seule offre de chaque joueur : b_i, $i = 1, \ldots, n$.
- Offres « simultanées » dans le sens que les joueurs ignorent les offres des autres.
- L'assistance des joueurs n'est pas nécessaire.
- Le joueur i avec l'enchère b_i la plus grande est le gagnant.
- Il paie b_i pour l'objet.
- Parfois, toutes les offres sont révélées après l'enchère, parfois seulement l'offre gagnante, parfois aucune offre.

Enchère sous pli cacheté au second prix

- Une seule offre de chaque joueur : b_i, $i = 1, \ldots, n$.
- Offres « simultanées », l'assistance des joueurs n'est pas nécessaire.
- Soit b_i l'offre la plus élevée et b_j la seconde.
- Le joueur i avec l'enchère b_i est le gagnant.
- Il paie b_j pour l'objet.
- L'assistance des joueurs n'est pas nécessaire.
- Nommé aussi l'enchère de Vickrey.

Enchère all-pay

- Une seule offre de chaque joueur : b_i, $i = 1, \ldots, n$
- Offres « simultanées »
- Soit b_i l'offre la plus élevée.
- Le joueur i avec l'enchère b_i est le gagnant.
- Chaque joueur j paie b_j, gagnant ou non.
- Phénomènes semblables : élections, recherche et développement, sports, lobbying, lézards.
- Une variation, la guerre d'attrition : deux joueurs, le gagnant et le perdant paie l'offre la moins élevée.

L'équivalence (en terme de résultat) des enchères

- Deux enchères sont équivalentes si les résultats (qui gagne, quels paiements) en équilibre sont pareils.
- Dans un sens, l'enchère anglaise est équivalente à l'enchère au second prix:
  - b_i est l'enchère la plus élevée que joueur i est prêt à faire.
- Dans un sens, l'enchère hollandaise est équivalente à l'enchère au premier prix.
  - b_i est la valeur pour laquelle joueur i arrêterait le cadran si personne ne l'avait déjà fait.
- Ces analyses fonctionnent bien pour les valeurs privées, moins bien pour les valeurs communes.

Équilibre de l'enchère à deuxième prix

- n joueurs, joueur i a une valeur privée de v_i.
- Pas besoin de spécifier la distribution des valeurs.
- Déclarer une valeur $b_i = v_i$ est une stratégie dominante!
  - Stratégie facile à comprendre, calculer.
  - Pas besoin des informations sur les autres joueurs.
- Celui qui valorise l'objet le plus gagne en équilibre.
- Faire révéler les valeurs coûte au vendeur : une partie du surplus (la différence entre les deux premières valeurs) va au gagnant.
- $b_i > v_i$: courir le risque de gagner et payer plus cher que sa valeur.
- $b_i < v_i$: courir le risque de perdre, sans avantage.

Une enchère inversée : réduction de la pollution

- Il y a plusieurs émetteurs du SO_2 dans un pays.
- Le gouvernement veut réduire les émissions par 10^6 tonnes à coût minimal.
- Chaque émetteur i peut réaliser la réduction à un coût de c_i.
- Mécanisme naïf : demander aux émetteurs leur coûts et obliger l'émetteur à coût *signalé* minimal de réduire ses émissions.
- Mécanisme de Vickrey : même chose, mais récompenser le pollueur à coût signalé minimal un montant égal au coût en deuxième place.
- Le résultat :
  - Tous les pollueurs ont l'incitation de signaler leur vrai coût.
  - La réduction des émissions se produit au coût minimal.
  - Le gouvernement paie plus que le coût minimal.
- Attention : le jeux dans un contexte plus large.

Équilibre de l'enchère à premier prix - définition

- On commence avec un cas simple:
  - Deux joueurs, $i = 1, 2$.
  - $v_i \sim \mathrm{iid}\,\mathrm{U}(0, 1)$ (valeurs certaines et privées).
- Un équilibre est une fonction $b_1(v_1)$ et une fonction $b_2(v_2)$ telles que pour chaque $v_1 \in [0, 1]$, $b_1(v_1)$ maximise

$$\Pr[b_1 > b_2(v_2)](v_1 - b_1)$$

  et pour chaque $v_2 \in [0, 1]$, $b_2(v_2)$ maximise

$$\Pr[b_2 > b_1(v_1)](v_2 - b_2).$$

- Si on change la distribution des v_i, la définition ne change pas (mais la probabilité, oui).
- En cas de plusieurs joueurs, $b_2(v_2)$ et $b_1(v_1)$ sont remplacés par l'enchère maximale des autres joueurs.

Équilibre pour l'enchère au premier prix - solution

- Trouver une solution est difficile; vérifier, plus facile.
- Proposons $b_2(v_2) = \lambda v_2$, pour un $\lambda \in [0, 1]$.
- Si $b_2(v_2) = \lambda v_2$ est la stratégie de joueur deux, joueur un n'offre jamais plus que $b_1 = \lambda$.
- Sa meilleure réponse, comme fonction de v_1, est

$$b_1(v_1) = \arg\max_{b_1} \Pr[b_1 > \lambda v_2](v_1 - b_1).$$

- Si $b_1 \leq \lambda$,

$$\Pr[b_1 > \lambda v_2] = \Pr[v_2 < b_1/\lambda] = b_1/\lambda.$$

- Pourvu que $b_1 \leq \lambda$, $b_1(v_1)$ maximise

$$\frac{b_1}{\lambda}(v_1 - b_1),$$

  et la solution est $b_1 = v_1/2$, qui est de la forme $b_1 = \lambda v_1$.
- $b_i = v_i/2$, $i = 1, 2$ est un équilibre — $b_i(v_i)$ n'est jamais plus grand que $\lambda = 1/2$.

Revenu au vendeur - enchère au premier prix

- Soit π le revenu moyen dans le cas $v_i \sim \text{iid}\, U(0,1)$, $i = 1, 2$.
- La densité sur $[0,1]^2$ est uniforme, $f(v_1, v_2) = 1$.
- Pour l'enchère à premier prix, $\pi = E[\max(v_1/2, v_2/2)]$:

$$\begin{aligned}
\pi &= \int_0^1 \int_0^1 f(v_1, v_2) \max(v_1/2, v_2/2)\, dv_2\, dv_1 \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{v_1} \frac{v_1}{2}\, dv_2 + \int_{v_1}^1 \frac{v_2}{2}\, dv_2 \right] dv_1 \\
&= \int_0^1 \frac{v_1}{2} [v_2]_0^{v_1} + \left[\frac{1}{4} v_2^2 \right]_{v_1}^1 dv_1 \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{4} v_1^2 + \frac{1}{4} \right) dv_1 \\
&= \left[\frac{1}{12} v_1^3 + \frac{1}{4} v_1 \right]_0^1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Revenu au vendeur - enchère du deuxième prix

- Pour l'enchère à deuxième prix, $\pi = E[\min(v_1, v_2)]$:

$$\begin{aligned}
\pi &= \int_0^1 \int_0^1 \min(v_1, v_2)\, dv_2\, dv_1 \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{v_1} v_2\, dv_2 + \int_{v_1}^1 v_1\, dv_2 \right] dv_1 \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} v_1^2 + v_1(1 - v_1) \right] dv_1 \\
&= \left[\frac{1}{2} v_1^2 - \frac{1}{6} v_1^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

- Même valeur en moyen, mais remarquez que les revenus diffèrent de cas en cas: si $v_1 = 0.2$ et $v_2 = 0.7$, les revenus sont $v_1 = 0.2$ et $v_2/2 = 0.35$.

Équivalence en termes de revenu

- Le résultat sur l'égalité de revenu espéré se généralise.
- Voici quelques hypothèses sur le jeu et les joueurs:
  1. Les joueurs sont neutres pour le risque.
  2. Les valeurs (ou signales) v_i sont iid, avec $v_i \in [\underline{v}, \overline{v}]$.
  3. $F(v)$ continue, strictement croissante sur $[\underline{v}, \overline{v}]$
  4. Si $v_i = \underline{v}$, joueur i a un gain espéré de zéro.
  5. En équilibre, celui qui valorise l'objet le plus gagne l'objet.
- Notez:
  - Il y a très peu de structure sur les actions des joueurs : par exemple, plusieurs étapes sont possibles.
  - Les jeux où les perdants paient sont possibles : par exemple, la vente all-pay.
  - Il peut y avoir plusieurs objets (avec modifications).
  - Plus de flexibilité que le cas $v_i \sim U(0, 1)$.
  - Les deux dernières hypothèses tiennent pour les cinq enchères ci-haut et d'autres.

Quelques définitions

Pour chaque v, s :

- $S_i(v)$ est le gain espéré de joueur i *en équilibre*, quand sa valeur est de v.
- $P_i(v)$ est la probabilité que joueur i gagne, en équilibre, comme fonction de v.
- $E_i(v)$ est le paiement espéré, en équilibre, de joueur i, comme fonction de v.
- $S_i(v|s)$ est le gain espéré de joueur i, s'il dévie en faisant semblant être un joueur à valeur s, quand les autres joueurs agissent comme dans l'équilibre.

Notes :

- On conditionne ci-haut à $v_i = v$, mais les valeurs des autres joueurs sont aléatoires.
- Exemple : pour l'enchère à premier prix $E_i(v) = P_i(v)b_i(v)$.

Dérivation de l'équivalence I

- Quelques résultats (hypothèse 1) :

$$S_i(v) = vP_i(v) - E_i(v),$$

$$S_i(s) = sP_i(s) - E_i(s),$$

$$S_i(v|s) = vP_i(s) - E_i(s).$$

- La substitution de $E_i(s) = sP_i(s) - S_i(s)$ dans $S_i(v|s) = vP_i(s) - E_i(s)$ donne

$$S_i(v|s) = vP_i(s) - sP_i(s) + S_i(s) = S_i(s) + (v - s)P_i(s).$$

- La dérivée par rapport à s donne (hypothèses 2, 3 pour l'existence de la dérivée)

$$\frac{\partial S_i(v|s)}{\partial s} = S_i'(s) + (v - s)P_i'(s) - P_i(s).$$

- Condition de première ordre : cette dérivée doit être nulle pour $s = v$ et donc

$$S_i'(v) = P_i(v).$$

Dérivation de l'équivalence II

- On vient de dériver $S_i'(v) = P_i(v)$, qui donne l'intégral définie

$$\int_{\underline{v}}^{v} P_i(s)\, ds = S_i(v) - S_i(\underline{v}).$$

- Par hypothèse 4, $S_i(\underline{v}) = 0$, alors

$$S_i(v) = \int_{\underline{v}}^{v} P_i(s)\, ds.$$

- Maintenant on utilise l'hypothèse 5 (efficacité) :
  - La fonction de probabilité $P_i(v)$ est pareille dans toutes les enchères qui vérifient les hypothèses.
  - Même chose pour la fonction de valeur $S_i(v)$.
  - Même chose pour la fonction $E_i(v) = vP_i(v) - S_i(v)$.
  - Le revenu espéré du vendeur est $E[\sum_{i=1}^{n} E_i(v_i)]$.
- Conclusion: le revenu espéré du vendeur est pareille pour toutes les enchères qui vérifient les hypothèses.

Application du théorème d'équivalence du revenu I

- Supposons que les hypothèses du théorème tiennent.
- Le paiement espéré d'un joueur de type v est pareil pour tous les enchères du théorème.
- Paiement espéré du joueur de type v, enchère du 2e prix :

$$\begin{aligned}
E_i(v) &= P_i(v) E[\max_{j \neq i} v_j | \max_{j \neq i} v_j < v] \\
&= P_i(v) \frac{\int_{x=\underline{v}}^{v} x(n-1) f(x)(F(x))^{n-2} dx}{\int_{x=\underline{v}}^{v} (n-1) f(x)(F(x))^{n-2} dx} \\
&= P_i(v) \left[v - \frac{\int_{x=\underline{v}}^{v} (F(x))^{n-1} dx}{(F(v))^{n-1}} \right].
\end{aligned}$$

- 3ième équation, numérateur : intégration par parties, avec

$$u = x,\ dv = (n-1) f(x) F(x)^{n-2} \quad du = 1,\ v = F(x)^{n-1}.$$

Application du théorème d'équivalence du revenu II

- Le paiement espéré du joueur de type v dans l'enchère du premier prix est $P_i(v)b_i(v)$, ce qui donne

$$b_i(v) = v_i - \frac{\int_{x=\underline{v}}^{v} (F(x))^{n-1} dx}{(F(v))^{n-1}}.$$

Aversion pour le risque et collusion

Aversion pour le risque, Klemperer (1999), Section 5 :

- Comment changent les enchères à 1er et à 2ième prix si les joueurs sont averses pour le risque?
- Paiements plus élevés versus plus certains.
- Si le vendeur est averse pour le risque et non les joueurs?

Collusion, Section 9 :

- Que ferait les enchérisseurs pour faire de la collusion dans la vente à deuxième prix?
- Premier prix?
- Quelles sont les tentations pour dévier du plan de la collusion?

La malédiction du gagnant I

- Rappel : pour l'enchère à premier prix, quand les valeurs sont privées, l'utilité espérée associée à une enchère de b_i, quand la valeur du joueur i est de v_i, est de

$$\Pr[b_i > \max_{j \neq i}(b_j)](v_i - b_i).$$

- Pour une loi donnée de $\max_{j \neq i}(b_j)$, on peut maximiser cette utilité comme fonction de v_i.
- Passons au cas des valeurs communes : la valeur v de l'objet est incertaine, chaque joueur observe un signal privé de valeur.
- $E_i[v] \neq E_i[v|E_j[v]]$ est possible : un joueur apprend quelque chose sur v en découvrant l'information d'un autre joueur.
- Une loi pertinente de probabilité :

$$E[X] = \Pr[A]E[X|A] + (1 - \Pr[A])E[X|A^c],$$

où A est un événement; A^c, son complément et X, une variable aléatoire.

La malédiction du gagnant II

- Dans le cas des valeurs communes, l'utilité espérée associée à une offre de b_i est

$$\begin{aligned} &\Pr[b_i > \max_{j \neq i}(b_j)] \cdot E[v - b_i | b_i > \max_{j \neq i}(b_j)] \\ &+(1 - \Pr[b_i > \max_{j \neq i}(b_j)]) \cdot 0 \\ &= \Pr[b_i > \max_{j \neq i}(b_j)] \cdot E[v - b_i | b_i > \max_{j \neq i}(b_j)]. \end{aligned}$$

- On valorise les conséquences de l'offre b_i comme si elle est l'offre gagnante.
- Si les signaux de valeur informent sur v,

$$E[v - b_i | b_i > \max_{j \neq i}(b_j)] < E[v - b_i].$$

- Un joueur sous la malédiction du gagnant ne conditionne pas et maximise $\Pr[b_i > \max_{j \neq i}(b_j)] E[v - b_i]$. Le fait de gagner est un signal négatif de valeur. (Également, le fait de perdre est un signal positif de valeur.)

Équilibre pour l'enchère de premier prix, n joueurs

- Maintenant, il y a n joueurs, $i = 1, \ldots, n$.
- $v_i \sim \mathrm{iid}\, U(0,1)$.
- Comme pour deux joueurs, on vérifie qu'il y a un équilibre avec $b_i = \lambda v_i$.
- Problème de joueur i : pour v_i donné, $b_i(v_i)$ maximise

$$\Pr[b_i > \max_{i \neq j} b_j](v_i - b_i).$$

- Si les autres jouent $b_j = \lambda v_j$ et si $b_i \leq \lambda$,

$$\begin{aligned} \Pr[b_i > \max_{i \neq j} b_j] &= \prod_{j \neq i} \Pr[b_i > b_j] \\ &= \prod_{j \neq i} \Pr[b_i > \lambda v_j] = \left(\frac{b_i}{\lambda}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Équilibre pour l'enchère de premier prix, n joueurs

- Si $b_i \leq \lambda$ et les autres joueurs jouent $b_j = \lambda v_j$, le profit pour une enchère b_i est de

$$\left(\frac{b_i}{\lambda}\right)^{n-1} (v_i - b_i).$$

- La valeur de b_i qui maximise ce profit est $b_i = \frac{n-1}{n} v_i$.
- Ce résultat suggère un équilibre où $\lambda = \frac{n-1}{n}$ et $b_i(v_i) = \frac{n-1}{n} v_i$, $i = 1, \ldots, n$.
- Il faut confirmer que $b_i \leq \frac{n-1}{n}$ toujours.
- La valeur maximale de v_i est 1, ce qui le confirme.

Revenu espéré pour l'enchère de premier prix, n joueurs I

- Soit $R = \max_i b_i$ l'enchère maximale, qui égale au revenu.
- Sa fonction de répartition est

$$\begin{aligned}
F(r) &= \Pr[\max_i b_i \leq r] \\
&= \prod_{i=1}^{n} \Pr[b_i \leq r] \\
&= \prod_{i=1}^{n} \Pr[v_i \leq nr/(n-1)] \\
&= \begin{cases} 0 & r < 0 \\ \left(\frac{n}{n-1} r\right)^n & 0 \leq r \leq \frac{n-1}{n} \\ 1 & r > \frac{n-1}{n} \end{cases}
\end{aligned}$$

Revenu espéré pour l'enchère de premier prix, n joueurs II

- Sa densité est

$$f(r) = \begin{cases} 0 & r < 0 \\ \left(\frac{n}{n-1}\right)^n n r^{n-1} & 0 \leq r \leq \frac{n-1}{n} \\ 0 & r > \frac{n-1}{n} \end{cases}$$

- Sa valeur espérée est le revenu espéré de l'enchère:

$$\begin{aligned} E[r] &= \int_0^{(n-1)/n} f(r) r dr \\ &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \int_0^{(n-1)/n} n r^n dr \\ &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left[\frac{n}{n+1} r^{n+1}\right]_0^{(n-1)/n} \\ &= \frac{n-1}{n+1}. \end{aligned}$$

L'approche revenu marginal

- Prenez un joueur quelconque, avec valeur privée $v_i \in [\underline{v}, \overline{v}]$.
- Mettons que la fonction de répartition de v_i est $F(v)$.
- Considérer une offre à prendre ou à laisser à i :
  - Le vendeur offre l'objet au prix $\hat{v}$ à i.
  - i accepte si $\hat{v} < v_i$, un événement avec probabilité $1 - F(\hat{v})$.
  - Le revenu espéré est de $\hat{v}(1 - F(\hat{v}))$.
  - Interprétez $\hat{v}$ comme un prix, $q(\hat{v}) = 1 - F(\hat{v})$ comme une quantité.
  - Selon cette interprétation, $q(\hat{v})$ est une courbe de demande.
  - Revenu marginal :

$$MR(q(v)) = \frac{d}{dq} vq = v + q\frac{dv}{dq} = v + q/\left(\frac{dq}{dv}\right) = v - \frac{1 - F(v)}{f(v)}.$$

- On appelle $MR(v) = v - (1 - F(v))/f(v)$ le revenu marginal d'un joueur avec valeur v.
- Pensez à un monopole, des consommateurs avec une répartition de valeurs donnée par $F(v)$.

Une identité

Deux façons d'exprimer le revenu espéré d'un vendeur qui fait une offre à prendre ou à laisser:

$$R = q(\hat{v})\hat{v}, \quad R = \int_0^{q(\hat{v})} MR(q)\, dq.$$

D'où vient l'identité (vrai pour n'importe quel $\hat{v} \in [\underline{v}, \overline{v}]$)

$$\begin{aligned}
\hat{v} &= \frac{1}{q(\hat{v})} \int_0^{q(\hat{v})} MR(q)\, dq \\
&= \frac{1}{1 - F(\hat{v})} \int_{\hat{v}}^{\overline{v}} MR(q(v)) f(v)\, dv \\
&= E[MR(q(v)) | v > \hat{v}].
\end{aligned}$$

2ième équation : changement de variables, $q = q(v) = 1 - F(v)$, $dq = q'(v)\, dv = -f(v)\, dv$, $q(\overline{v}) = 1 - F(\overline{v}) = 0$. Voir Klemperer (1999), Appendice B, note 126.

Le résultat

- On sait que pour chaque i et $\hat{v} \in [\underline{v}, \overline{v}]$,

$$\hat{v} = E[MR(v_i)|v_i > \hat{v}]$$

- Considérons une vente aux enchères à 2ième prix.
- Soit $v_{(1)} > v_{(2)}$ les deux valeurs les plus élevées. Elles sont des variables aléatoires.
- On peut conclure que

$$E[v_{(2)}] = E[E[MR(v)|v > v_{(2)}]] = E[MR(v_{(1)})].$$

- Le revenue de la vente à 2ième prix est de $R = v_{(2)}$, alors

$$E[R] = E[MR(v_{(1)})].$$

- Le revenu espéré de l'enchère à 2ième prix est l'espérance du revenu marginal du gagnant.
- Par équivalence de revenu, c'est le revenu espéré d'autres enchères quand les hypothèses du théorème d'équivalence de revenu tiennent.