Actions cachées, aléa morale, problèmes principal-agent

ECN 6013, automne 2019

William McCausland

2019-12-12

Actions cachées, aléa morale, problèmes principal-agent

- Un agent économique a un contrôle partiel sur un résultat (accident ou non, succès ou échec d'un projet).
- Son action (prudence, effort) n'est pas observée (par un assureur, par un employeur).
- Les actions qui augmentent la probabilité d'un bon résultat sont coûteuses pour l'agent.
- L'agent a de l'aversion pour le risque.
- Une réduction de risque atténue les incitations pour choisir les 'bonnes' actions.
- Partager le risque avec d'autres personnes entraine une externalité.
- Tension entre la réduction de risque et les bonnes incitations.

Assurance avec action cachée

Exemples d'aléa morale en assurance

- Comportement au volant et assurance automobile
- Protection du domicile et assurance maison
- (Absence d') assurance pour perte de capital dans la maison.
- Assurance incendie et incendie criminel
- Assurance vie, meurtre et suicide
- Comportement des banques sous l'assurance implicite des gouvernements

Les actions prises ne sont pas efficaces, à cause d'une différence entre les coûts ou bénéfices privés et les coûts ou bénéfices sociaux.

Les problèmes principal-agent

- Étudiés en droit, économie, sciences politiques.
- Interaction entre un (des) principal et un (des) agent.
- Le principal veut inciter l'agent à faire quelque chose.
- L'agent effectue une action cachée.
- Souvent le principal peut plus facilement tolérer du risque.
- Exemples : (principal, agent)
  - actionnaires, gérant
  - employeur, employé
  - client, mécanicien
  - propriétaires des terrains, agriculteurs
  - électorat, politiciens
  - politiciens des pays riches, bureaucrates de l'aide étrangère
  - système légal, conducteurs, firmes, etc. (degré de prudence)

Aparté: la fonction d'utilité CARA

- La fonction d'utilité CARA (Constant Absolute Risk Aversion)

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda x}) & \lambda > 0, \\ x & \lambda = 0. \end{cases}$$

- Elle est monotone et concave:

$$v'(x) = \frac{1}{\lambda}(\lambda e^{-\lambda x}) > 0 \qquad v''(x) = -\lambda e^{-\lambda x} < 0$$

- L'aversion absolue pour le risque (indice Arrow-Pratt) est de

$$-\frac{v''(x)}{v'(x)} = \lambda.$$

- Plus grand λ, plus de l'aversion; $\lambda = 0$ est la neutralité.

L'espérance d'utilité CARA pour un risque Gaussien

- Si $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, $E[e^x] = e^{\mu + \sigma^2/2}$ et alors
$$E[e^{-\lambda x}] = e^{-\lambda\mu + \lambda^2\sigma^2/2}.$$
- L'équivalent certain d'un risque Gaussien $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, selon l'utilité CARA:
$$E[v(x)] = E\left[\frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda x})\right] = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(\mu - \lambda\sigma^2/2)})$$
$$= v(\mu - \lambda\sigma^2/2).$$
- La prime de risque ici est de $\lambda\sigma^2/2$:
  - on accepte $\lambda\sigma^2/2$ moins en espérance pour avoir un montant certain, ou
  - il faut donner une compensation moyenne de $\lambda\sigma^2/2$ pour faire accepter le risque.

Un premier modèle principal-agent (manuel IEA)

L'agent :

- choisit d'accepter ou rejeter un contrat du principal,
- le cas échéant, choisit un niveau $e \geq 0$ d'effort,
- a une utilité de réservation u_0,
- obtient l'utilité $E[v(w - e^2/(2a))]$, où
  - w est le paiement du principal,
  - $v(w)$ est CARA avec aversion λ pour le risque,
  - $a > 0$ est l'habileté de l'agent, *observée*. (L'effort est plus facile si a est élevé, mais pas plus efficace.)

Un projet du principal :

- La valeur du projet est de $x \sim N(e, \sigma^2)$.

Le principal : (neutre pour le risque)

- offre un contrat à l'agent qui paie $sx + y$ à l'agent,
- maximise la valeur nette (après le paiement) espérée du projet.

Le problème de l'agent

- Son utilité s'il accepte le contrat est de

$$u = E[v(sx + y - e^2/(2a))] = v(se + y - e^2/(2a) - \lambda s^2\sigma^2/2).$$

- L'effort optimal (u est une fonction concave d'une fonction concave en e alors concave) :

$$\frac{\partial u}{\partial e} = v'(se + y - e^2/(2a) - \lambda s^2\sigma^2/2)(s - e/a), \qquad e^* = sa.$$

- Son utilité indirecte (pour $e = e^*$) :

$$\begin{aligned} u^*(s,y) &= v(s^2 a + y - \lambda s^2\sigma^2/2 - s^2a^2/(2a)) \\ &= v(s^2a/2 + y - \lambda s^2\sigma^2/2). \end{aligned}$$

- Il accept le contrat (s, y) si $u^*(s,y) \geq u_0$, ou si

$$v(y + s^2a/2 - \lambda s^2\sigma^2/2) \geq u_0.$$

Le problème du principal

- La condition pour accepter le contrat devient la contrainte de participation pour le principal

$$y + s^2 a/2 - \lambda s^2 \sigma^2/2 \geq v^{-1}(u_0).$$

- Elle est saturée, alors $y = v^{-1}(u_0) - s^2 a/2 + \lambda s^2 \sigma^2/2$.
- La valeur nette du projet est de

$$\begin{aligned} \pi = E[x - sx - y] &= (1-s)sa - (v^{-1}(u_0) - s^2 a/2 + \lambda s^2 \sigma^2/2) \\ &= sa - s^2 a/2 - v^{-1}(u_0) - \lambda s^2 \sigma^2/2. \end{aligned}$$

- La part optimale:

$$\frac{\partial \pi}{\partial s} = a - sa - \lambda s \sigma^2, \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial s^2} = -a - \lambda \sigma^2 < 0,$$

$$s^* = \frac{a}{a + \lambda \sigma^2}.$$

Notes sur le problème principal-agent

- Le principal veut donner les bonnes incitations pour l'effort, mais doit compenser l'agent pour assumer du risque.
- L'effort efficace $e = a$ égalise le gain marginal (v') et le coût marginal ($v' \cdot e/a$) d'un agent qui garde tout le profit marginal.
- Si le principal observe l'effort, $e = a$ est optimal (et efficace)
- Si l'agent est neutre pour le risque ($\lambda = 0$), $s = 1$ est optimal pour le principal et puis $e = a$ est le choix de l'agent.
- Si $\lambda > 0$, le principal choisit $s < 1$ et l'agent $e < a$.
- Interpretations de s :
  - $s = 1$: vente du projet à l'agent pour $-y$.
  - $s = 0$: relation employeur/employée avec salaire versé,
  - $0 < s < 1$: commission de vente, métayage, franchisage

Un modèle principal-agent avec actions discrètes

- L'agent :
  - choisit d'accepter ou de rejeter un contrat du principal,
  - le cas échéant, choisit un niveau $e \in \{0, 1\}$ d'effort,
  - a une utilité de réservation u_0,
  - obtient l'utilité $E_e[u(s)] - c_e$ sous le contrat s'il fait l'effort e, avec $c_1 > c_0 = 0$, u concave.
  - maximise son utilité.
- Un projet du principal :
  - réussit avec probabilité π_e, selon l'effort e de l'agent, avec $\pi_1 > \pi_0$,
  - vaut 1 au cas de succès, 0 sinon.
- Le principal:
  - est neutre pour le risque,
  - choisit un contrat (s_0, s_1) qui paie s_1 en cas de succès, s_0 sinon
  - maximise la valeur espérée du projet moins le paiement espéré à l'agent (par neutralité pour le risque)

Le cas où l'effort est observé

Dans ce cas, le principal peut acheter la participation à bas effort au coût σ_0 qui vérifie la contrainte de participation $u(\sigma_0) = u_0$, c'est à dire au coût

$$\sigma_0 \equiv u^{-1}(u_0).$$

Ou il peut acheter la participation à haut effort au coût σ_1 qui vérifie la contraint de participation $u(\sigma_1) - c_1 = u_0$, c'est à dire au coût

$$\sigma_1 \equiv u^{-1}(u_0 + c_1).$$

Notes :

- Le profit dans le premier cas est de $\pi_0 - \sigma_0 = \pi_0 - u^{-1}(u_0)$.
- Le profit dans le deuxième cas est de $\pi_1 - u^{-1}(u_0 + c_1)$.
- Le principal choisit le contrat (ou σ_0 pour $e = 0$ ou σ_1 pour $e = 1$) qui maximise son profit,
- Le principal assume tout le risque car l'agent est assuré contre le risque. (L'agent est payé pour l'effort et non le résultat.)
- L'allocation est efficace.

Le cas où l'effort n'est pas observé

La stratégie :

1. trouver le contrat qui incite $e = 0$ et qui maximise le profit parmi tous les contrats qui incite $e = 0$, (il y a une contrainte de compatibilité des incitations pour éviter $e = 1$)
2. trouver le contrat qui incite $e = 1$ et qui maximise le profit parmi tous les contrats qui incite $e = 1$, (il y a une contrainte de compatibilité des incitations pour éviter $e = 0$)
3. choisit le contrat le plus payant entre les deux.

La première étape est facile :

- Considérez le contrat $(s_0, s_1) = (\sigma_0, \sigma_0)$, où $\sigma_0 \equiv u^{-1}(u_0)$.
- On obtient la participation avec $e = 0$ pour le salaire constant σ_0, qui était optimal dans un problème moins contraignant.
- Alors ce contrat doit être optimal parmi les contrats qui incitent $e = 0$.

Étape 2 : contrat optimal parmi ceux qui incitent $e = 1$

- Prenons $u(s) = s^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ (concave)
- La contrainte de participation est $E_{e=1}[u(s)] - c_1 \geq u_0$:

$$\pi_1 s_1^\alpha + (1 - \pi_1) s_0^\alpha - c_1 \geq u_0. \tag{1}$$

- La contrainte de compatibilité des incitations est $E_{e=1}[u(s)] - c_1 \geq E_{e=0}[u(s)]$:

$$\pi_1 s_1^\alpha + (1 - \pi_1) s_0^\alpha - c_1 \geq \pi_0 s_1^\alpha + (1 - \pi_0) s_0^\alpha,$$

  ou

$$s_1^\alpha - s_0^\alpha \geq c_1 / (\pi_1 - \pi_0). \tag{2}$$

- Le problème du principal est

$$\max_{s_0, s_1} \pi_1 (1 - s_1) + (1 - \pi_1)(-s_0) \quad \text{s.c.} \quad (1), (2)$$

- Remarque : si (1) et (2) sont saturées, il y a un seul contrat (s_0, s_1) qui vérifie les deux ; ce contrat donne le maximum.

La contrainte de participation est saturée

- Mettons que non : alors la solution (s_0, s_1) vérifie la contrainte de compatibilité des incitations et
$$\pi_1 s_1^\alpha + (1 - \pi_1) s_0^\alpha - c_1 = u' > u_0.$$
- Remplacer s_1^α par $s_1^\alpha - (u' - u_0)$, s_0^α par $s_0^\alpha - (u' - u_0)$ et la contrainte de participation tient toujours.
- La contrainte de compatibilité des incitations tient toujours elle aussi.
- Le profit du principal est plus élevé.
- Contradiction : (s_0, s_1) ne peut pas être la solution.

La contrainte de compatibilité des incitations est saturée

- Mettons que non: la solution (s_0, s_1) résout le problème avec fonction de Lagrange

$$L(s_0, s_1, \lambda) = \pi_1(1 - s_1) + (1 - \pi_1)(-s_0) \\ + \lambda(\pi_1 s_1^\alpha + (1 - \pi_1)s_0^\alpha - c_1 - u_0).$$

- $L(s_0, s_1, \lambda)$ est concave et un point stationnaire vérifie

$$\frac{\partial L}{\partial s_0} = -(1 - \pi_1) + \lambda(1 - \pi_1)\alpha s_0^{\alpha-1} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1} = -\pi_1 + \lambda\pi_1\alpha s_1^{\alpha-1} = 0.$$

- On a $\lambda = s_0^{1-\alpha}/\alpha = s_1^{1-\alpha}/\alpha$, alors $s_0 = s_1$.
- Intutition : s'il n'avait pas besoin d'inciter $e = 1$, le principal assurerait l'agent complètement.
- $s_0 = s_1$ n'est pas cohérent avec la contrainte de compatibilité des incitations : il y a une contradiction.

La solution au problème de l'étape 2

- Les deux contraintes sont saturées, alors on obtient s_0^α et s_1^α comme la solution de deux équations linéaires (les deux contraintes, mais avec égalité).
- En général, on obtient le contrat (s_0, s_1) optimal (parmi les contrats qui incitent $e = 1$) par $s_0 = u^{-1}(u(s_0))$, $s_1 = u^{-1}(u(s_1))$; ici, cela veut dire $s_0 = (s_0^\alpha)^{1/\alpha}$, $s_1 = (s_1^\alpha)^{1/\alpha}$.
- On calcul le profit espéré maximal (parmi les contrats qui incitent $e = 1$) comme $\pi_1 - \pi_1 s_1 - (1 - \pi_1) s_0$.

La solution finale

- On compare le profit maximal parmi les contrats qui incite $e = 1$ avec le profit maximal parmi les contrats qui incite $e = 0$, obtenu à l'étape 1 de la « stratégie ».
- La solution globale est celle qui donne le profit maximal (étape 3 de la stratégie).
- La solution dépend des paramètres α, π_0, π_1, u_0, c_1.